Università degli Studi di Verona
Scuola di Scienze e Ingegneria
Corso di Laurea in “Innovazione e Sostenibilità nella Produzione Industriale di Alimenti” (*ISPIA*)

Matematica e Statistica

Anno Accademico 2022/2023

Note del corso aggiornate al 10 novembre 2022

Docente
Dr. Giulio Fellin

Indice

1 Cenni di fondamenti della matematica

1.1 Logica e insiemi

Definizione 1.1 (Formula, dimostrabilità)**.** Una *formula* φ è un'espressione matematica. Spesso scriviamo $\varphi(x)$ per indicare che φ contiene la variabile libera x.

Siano φ, ψ formule.

— Il *falso* $\perp$ non è mai valido.

— Il *vero* $\top$ è sempre valido.

— La *congiunzione* $\varphi \wedge \psi$ è valida se φ e ψ sono entrambe valide.

— La *disgiunzione* $\varphi \vee \psi$ è valida se φ è valida o se ψ è valida.

— L'*implicazione* $\varphi \to \psi$ è valida se, ogni volta che supponiamo che φ è valida allora otteniamo che ψ è valida.

Sia $\varphi(x)$ una formula.

— La *formula esistenziale* $\exists x(\varphi(x))$ è valida se esiste un oggetto a tale che $\varphi(a)$ è valida.

— La *formula universale* $\forall x(\varphi(x))$ è valida se per ogni oggetto a si ha che $\varphi(a)$ è valida.

Abbiamo inoltre le seguenti abbreviazioni:

— La *negazione* $\neg\varphi$ è definita come $\varphi \to \perp$.

— L'*equivalenza* $\varphi \leftrightarrow \psi$ è definita come

$$(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi).$$

Osservazione 1.2.

(i) Per ogni formula φ, vale $\varphi \to \varphi$.

(ii) *Principio di non contraddizione*: Per ogni formula φ, vale $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.

(iii) *Ex falso quodlibet sequitur*: Se φ è falsa, allora vale $\varphi \to \psi$.

Principio 1.3 (Dimostrazione per assurdo)**.** *Se $\neg\neg\varphi$ è dimostrabile, allora φ è dimostrabile.*

Definizione 1.4 (Insiemi, elementi, sottoinsiemi)**.**

— Un *insieme* A è una collezione di oggetti matematici.

— Gli oggetti che appartengono a A si chiamano *elementi* di A. Scriviamo $x \in A$ per "x è un elemento di A". La scrittura $x \notin A$ è un'abbreviazione per $\neg(x \in A)$.

Spesso usiamo i simboli {} per denotare gli elementi di un insieme. Ad esempio, l'insieme composto dagli elementi a, b, c e d è

$$\{a, b, c, d\}.$$

— L'insieme che non ha elementi si chiama *insieme vuoto*, e si indica con $\emptyset$.

— Due insiemi A e B si dicono *uguali*, in simboli $A = B$, se hanno gli stessi elementi, ovvero:

$$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

La scrittura $A \neq B$ è un'abbreviazione per $\neg(A = B)$.

— A è un *sottoinsieme* di B, in simboli $A \subseteq B$, se ogni elemento di A è anche un elemento di B, ovvero:

$$\forall x(x \in A \to x \in B).$$

A è un *sottoinsieme proprio* di B, in simboli $A \subsetneq B$, se

$$A \subseteq B \wedge A \neq B.$$

Se A è un insieme, possiamo definire il suo sottoinsieme A_φ attraverso una proprietà $\varphi(x)$:

$$X_\varphi = \{x \in A \colon \varphi(x)\}.$$

— Se A è un insieme, con $\mathscr{P}(A)$ indichiamo l'*insieme potenza* di A, ovvero la collezione dei sottoinsiemi di A.

Esempio 1.5.

— L'insieme dei *numeri naturali*:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

— L'insieme dei *numeri pari*:

$$\mathrm{Par} = \{n \in \mathbb{N} \colon \exists x (2x = n)\}.$$

— L'insieme dei *numeri dispari*:

$$\mathrm{Dis} = \{n \in \mathbb{N} \colon \exists x (2x + 1 = n)\}.$$

Osservazione 1.6. Due insiemi sono uguali se e solo se sono uno sottoinsieme dell'altro e viceversa:

$$A = B \leftrightarrow (A \subseteq B \land B \subseteq A).$$

Definizione 1.7 (Operazioni insiemistiche)**.** Siano A e B degli insiemi.

— L'*intersezione* di A e B è l'insieme degli elementi che stanno sia in A che in B:

$$A \cap B = \{x \colon x \in A \land x \in B\}.$$

— L'*unione* di A e B è l'insieme degli elementi che stanno in A più tutti gli elementi che stanno in B:

$$A \cup B = \{x \colon x \in A \lor x \in B\}.$$

— Il *complemento* di B in A è l'insieme degli elementi che stanno in A ma non in B:

$$A \setminus B = \{x \in A \colon x \notin B\}.$$

Esempio 1.8. È facile notare che:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Par} \cap \mathrm{Dis} = \emptyset, && \mathbb{N} \setminus \mathrm{Par} = \mathrm{Dis}, \\ &\mathrm{Par} \cup \mathrm{Dis} = \mathbb{N}, && \mathbb{N} \setminus \mathrm{Dis} = \mathrm{Par}. \end{aligned}$$

Proposizione 1.9. *Sia X un insieme, e siano A, B, C sottoinsiemi di X. Allora:*

(i) $\emptyset \subseteq X$ *e* $X \subseteq X$.

(ii) $A \cap A = A$ *e* $A \cup A = A$.

(iii) $A \cap B = B \cap A$ *e* $A \cup B = B \cup A$.

(iv) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *e* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

(v) $(A \cap B) \cup A = A$ *e* $(A \cup B) \cap A = A$.

(vi) $A \subseteq B \leftrightarrow A \cap B = A$ *e* $A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = B$.

(vii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *e* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Dimostrazione.

(i) $\emptyset \subseteq X$ per esteso si scrive:

$$\forall x (x \in \emptyset \to x \in X),$$

che è banalmente soddisfatta perché $x \in \emptyset$ è sempre falsa (vedasi Osservazione 1.2(iii)).
$X \subseteq X$ per esteso si scrive:

$$\forall x (x \in X \to x \in X),$$

che è soddisfatta (vedasi Osservazione 1.2(i)).

(v) Vogliamo dimostrare che $(A \cap B) \cup A = A$. Per farlo, dividiamo la dimostrazione in due parti (vedasi l'Osservazione 1.6):

— Dimostriamo che $(A \cap B) \cup A \subseteq A$. Sia $x \in (A \cap B) \cup A$, vogliamo dimostrare che $x \in A$.

Per definizione di $\cup$, abbiamo che $x \in A \cap B$ oppure $x \in A$.

- Nel caso $x \in A$ abbiamo concluso.
- Nel caso $x \in A \cap B$, per definizione di $\cap$ abbiamo che $x \in A$ e $x \in B$. In particolare, $x \in A$, e anche in questo caso abbiamo concluso.

In entrambi i casi abbiamo ottenuto $x \in A$ come desiderato. Quindi $(A \cap B) \cup A \subseteq A$.

— Dimostriamo che $A \subseteq (A \cap B) \cup A$. Sia $x \in A$, vogliamo dimostrare che $x \in (A \cap B) \cup A$. Ma ciò è vero per definizione di $\cup$. Quindi $A \subseteq (A \cap B) \cup A$.

Abbiamo concluso la dimostrazione di $(A \cap B) \cup A = A$. La dimostrazione di $(A \cup B) \cap A = A$ è lasciata per esercizio.

La dimostrazione dei punti rimanenti è lasciata per esercizio. ■

Proposizione 1.10. *Sia X un insieme, e siano A, B sottoinsiemi di X. Si usi l'abbreviazione:*

$$Y' = X \setminus Y$$

per $Y \subseteq X$. Allora:

(i) $X' = \emptyset$ *e* $\emptyset' = X$.

(ii) $A \cap A' = \emptyset$ *e* $A \cup A' = X$.

(iii) $A'' = A$.

(iv) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ *e* $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

(v) $A \subseteq B \leftrightarrow B' \subseteq A'$.

Dimostrazione.

(i) Per definizione di complemento, si ha:

$$\begin{aligned} X' &= \{x \in X : x \notin X\} = \emptyset, \\ \emptyset' &= \{x \in X : x \notin \emptyset\} = X. \end{aligned}$$

(ii) Si ha:

$$\begin{aligned} A \cap A' &= \{x : x \in A \land x \in A'\} && \text{per definizione di } \cap \\ &= \{x : x \in A \land x \in X \setminus A\} && \text{per definizione di } ' \\ &= \{x : x \in A \land x \in X \land x \notin A\} && \text{per definizione di } \setminus \end{aligned}$$

che è vuoto perché nessun elemento può stare in A e contemporaneamente non stare in A (vedasi Osservazione 1.2(iii)). La dimostrazione di $A \cup A' = X$ è lasciata per esercizio.

La dimostrazione dei punti rimanenti è lasciata per esercizio. ■

Definizione 1.11. Siano A e B insiemi. Il loro *prodotto cartesiano* $A \times B$ è l'insieme delle *coppie ordinate* (a, b) dove $a \in A$ e $b \in B$.

1.2 Funzioni

Definizione 1.12 (Funzioni)**.** Se A e B sono insiemi, una *funzione* $f: A \to B$ è una regola che associa ad ogni elemento $x \in A$ un unico elemento $f(x) \in B$, detto il *valore* di f in x. Scriviamo anche:

$$x \mapsto f(x).$$

Gli insiemi A e B sono chiamati rispettivamente il *dominio* e il *range* di f. Scriviamo:

$$\operatorname{dom} f = A \qquad \text{e} \qquad \operatorname{ran} f = B.$$

L'*insieme immagine* di f è definito come segue:

$$\operatorname{Im} f = \{f(a) \colon a \in \operatorname{dom} f\}.$$

Due funzioni f e g sono uguali, in simboli $f = g$, se

$$\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g \qquad \text{e} \qquad \forall x \in \operatorname{dom} f\,(f(x) = g(x)).$$

Osservazione 1.13. $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{ran} f$.

Esempio 1.14. Si consideri $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto 2n$. Allora:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, & f(50) &= 100, \\ f(1) &= 2, & \operatorname{Im} f &= \mathrm{Par}. \end{aligned}$$

Definizione 1.15 (Iniezione, suriezione)**.** Una funzione f è detta:

— *iniezione* (o *funzione iniettiva*) se, per ogni $x, y \in \operatorname{dom} f$,

$$f(x) = f(y) \to x = y;$$

— *suriezione* (o *funzione suriettiva*) se $\operatorname{Im} f = \operatorname{ran} f$;

— *biiezione* (o *funzione biiettiva*) se è sia un'iniezione che una suriezione.

Esempio 1.16. La funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto 2n$ è iniettiva ma non suriettiva.

Definizione 1.17 (Identità, costante)**.** Siano A, B insiemi.

— La *funzione identità* di A è

$$\mathrm{id}_A \colon A \to A, x \mapsto x.$$

— Fissato $c \in B$, la *funzione costante* $\hat{c}$ è definita come

$$\hat{c}\colon A \to B, x \mapsto c.$$

Osservazione 1.18. La funzione identità è una biiezione.

Definizione 1.19. Siano A, B, C insiemi. Si considerino le funzioni $f: A \to B$ e $g\colon B \to C$. La *composizione* di f e g è la funzione

$$g \circ f\colon A \to C, x \mapsto g(f(x)).$$

Possiamo rappresentarla con il diagramma:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Osservazione 1.20. La composizione *NON* è commutativa. Ad esempio, si considerino

$$\begin{aligned} f&: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto x+1, \\ g&: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto x^2. \end{aligned}$$

Si ottengono le composizioni:

$$\begin{aligned} g \circ f&: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto (x+1)^2, \\ f \circ g&: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto x^2+1. \end{aligned}$$

Proposizione 1.21. *Si considerino gli insiemi A, B, C, D e le funzioni f, g, h secondo il seguente diagramma:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & C \arrow[r, "h"'] & D \end{tikzcd}$$

Allora:

(i) $f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f$.

(ii) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che $f \circ \mathrm{id}_A = f$, ovvero che il diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "id_A"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

è *commutativo*. Per definizione di uguaglianza tra funzioni, il nostro obiettivo si può scrivere come

$$\underbrace{\mathrm{dom}(f \circ \mathrm{id}_A)}_{=A} = \underbrace{\mathrm{dom}\, f}_{=A} \quad \text{e} \quad \forall x \in \underbrace{\mathrm{dom}(f \circ \mathrm{id}_A)}_{=A}((f \circ \mathrm{id}_A)(x) = f(x)).$$

Osserviamo che $(f \circ \mathrm{id}_A)(x)$ è definito come $f(\mathrm{id}_A(x))$ che, per definizione di id_A, non è altro che $f(x)$.

La dimostrazione del fatto che che $f = \mathrm{id}_B \circ f$ e la dimostrazione del punto (ii) sono lasciate per esercizio. ∎

1.3 Induzione su $\mathbb{N}$

Principio 1.22 (Principio di induzione IND)**.** *Sia $\varphi(n)$ una formula sui numeri naturali tale che:*

(i) $\varphi(0)$, *e*

(ii) *per ogni $n \in \mathbb{N}$, se $\varphi(n)$ allora $\varphi(n+1)$.*

Allora $\varphi(n)$ vale per ogni $n \in \mathbb{N}$. In simboli:

$$(\varphi(0) \land (\forall n \in \mathbb{N}(\varphi(n) \to \varphi(n+1)))) \to \forall n \in \mathbb{N}(\varphi(n)).$$

Esempio 1.23. Vogliamo dimostrare, utilizzando il principio di induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la seguente formula $\varphi(n)$:

$$0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$\underline{\varphi(0)}$: Per prima cosa dobbiamo dimostrare $\varphi(0)$. Questo passo è detto *passo base*. Osserviamo che $\varphi(0)$ è:

$$0 = \frac{0(0+1)}{2},$$

che è vera.

$\underline{\varphi(n) \to \varphi(n+1)}$: Ora dobbiamo dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, se $\varphi(n)$ allora $\varphi(n+1)$. Questo passo è detto *passo induttivo*. Supponiamo allora $\varphi(n)$ (questa supposizione è detta *ipotesi induttiva*) e dimostriamo $\varphi(n+1)$, ovvero:

$$0+1+2+...+n+(n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

Poiché per ipotesi induttiva vale $\varphi(n)$, la parte a sinistra si può scrivere come:

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)}{2}+(n+1) &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

Principio 1.24 (Principio di induzione $\mathrm{IND}^<$)**.** *Sia $\varphi(n)$ una formula sui numeri naturali tale che:*

per ogni $n \in \mathbb{N}$, se $\forall m < n(\varphi(m))$ allora $\varphi(n)$.

Allora $\varphi(n)$ vale per ogni $n \in \mathbb{N}$. In simboli:

$$\forall n \in \mathbb{N}(\forall m < n(\varphi(m)) \to \varphi(n)) \to \forall n \in \mathbb{N}(\varphi(n)).$$

Proposizione 1.25. $\mathrm{IND} \leftrightarrow \mathrm{IND}^<$.

Dimostrazione. Supponiamo che valga IND e dimostriamo $\mathrm{IND}^<$. Supponiamo perciò di avere una formula $\varphi(n)$ sui numeri naturali tale che:

($\star$) per ogni $n \in \mathbb{N}$, se $\forall m < n(\varphi(m))$ allora $\varphi(n)$.

Il nostro obiettivo è dimostrare che $\varphi(n)$ vale per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per farlo, vogliamo utilizzare IND. Dobbiamo controllare che valgano le due condizioni:

$\underline{\varphi(0)}$: $\varphi(0)$ è soddisfatta in maniera banale dall'ipotesi ($\star$) poiché 0 non ha predecessori.

$\underline{\varphi(n) \to \varphi(n+1)}$: Fissato $n \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi(n)$, dobbiamo dimostrare $\varphi(n+1)$. Vogliamo utilizzare il principio di dimostrazione per assurdo. Supponiamo che $\neg\varphi(n+1)$. Per l'ipotesi ($\star$) deve esistere $m_0 < n+1$ tale che $\neg\varphi(m_0)$.[1] Per lo stesso ragionamento, deve esistere $m_1 < m_0$ tale che $\neg\varphi(m_1)$. Ripetendo lo stesso ragionamento, creiamo una catena discendente infinita:

$$... < m_k < ... < m_2 < m_1 < m_0 < n+1,$$

[1] Altrimenti si avrebbe $\forall m < n+1(\varphi(m))$ e, di conseguenza, $\varphi(n+1)$.

il che è impossibile nei numeri naturali. Quindi $\neg\neg\varphi(n+1)$ e, per il principio di dimostrazione per assurdo concludiamo $\varphi(n+1)$.

Questo conclude la dimostrazione che $\mathrm{IND} \to \mathrm{IND}^{<}$, l'altra direzione è lasciata per esercizio. ∎

Esercizi

Esercizio 1. Completare le dimostrazioni delle Proposizioni 1.9 e 1.10.

Esercizio 2. Sia X un insieme, e siano A, B, C sottoinsiemi di X. Dimostrare che:

(i) $A \setminus B = A \cap B'$.

(ii) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

(iii) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

(iv) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

(v) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Si definisca la differenza simmetrica di A e B come segue:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cap (B \setminus A).$$

Dimostrare che:

(vi) $A \triangle \emptyset = A$ e $A \triangle A = \emptyset$.

(vii) $A \triangle B = B \triangle A$.

(viii) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

(ix) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$.

Esercizio 3. Si considerino:

$$\begin{aligned} A &= \{0,1,2\}, \\ B &= \{0,1,2,3\}, \\ C &= \{0,1,2,3,4,5,6,7\}. \end{aligned}$$

(i) Elencare tutti i sottoinsiemi di A.

(ii) Elencare tutti i sottoinsiemi di B.

(iii) Elencare tutti gli elementi di $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.

(iv) Quanti elementi ha l'insieme $\mathscr{P}(C)$?

Esercizio 4. Completare la dimostrazione della Proposizione 1.21.

Esercizio 5. Completare la dimostrazione della Proposizione 1.25.

Esercizio 6. Si definisce $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Il principio di induzione IND$^+$ è il seguente:

$$(\varphi(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}^+(\varphi(n) \rightarrow \varphi(n+1)))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^+(\varphi(n)).$$

Dimostrare che IND $\leftrightarrow$ IND$^+$.

Esercizio 7. Dimostrare, utilizzando il principio di induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la seguente formula $\varphi(n)$:

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Esercizio 8. Dimostrare, utilizzando il principio di induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la seguente formula $\varphi(n)$:

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Esercizio 9. Dimostrare, utilizzando il principio di induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la seguente formula $\varphi(n)$:

$$(1 + 2022)^n \geqslant 1 + n \cdot 2022.$$

Esercizio 10. Sia $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}$ una funzione tale che, per ogni $m, n \in \mathbb{N}^+$,

$$f(m+n) = f(m)f(n).$$

Sia $a = f(1)$. Dimostrare, utilizzando il principio di induzione IND$^+$, che per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ vale:

$$f(n) = a^n.$$

1.4 Numeri razionali

Definizione 1.26.

— L'insieme dei *numeri interi* è definito come

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n \colon n \in \mathbb{N} \wedge n > 0\}.$$

— L'insieme dei *numeri razionali* è definito come

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \colon a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0 \right\}.$$

— Due numeri razionali $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ sono *uguali*, in simboli $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se

$$a \cdot d = c \cdot b.$$

Inoltre, dato $z \in \mathbb{Z}$, si identificano

$$z = \frac{z}{1}.$$

Osservazione 1.27. $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$.

Lemma 1.28. *Siano:*

$$\begin{aligned} \mathrm{Par}_{\mathbb{Z}} &= \{a \in \mathbb{Z} \colon \exists x(2x = a)\}, \\ \mathrm{Dis}_{\mathbb{Z}} &= \{a \in \mathbb{Z} \colon \exists x(2x + 1 = a)\}. \end{aligned}$$

Siano $a, b \in \mathbb{Z}$. Allora:

(i) $a \in \mathrm{Par}_{\mathbb{Z}} \to a^2 \in \mathrm{Par}_{\mathbb{Z}}$ *e* $a \in \mathrm{Dis}_{\mathbb{Z}} \to a^2 \in \mathrm{Dis}_{\mathbb{Z}}$,

(ii) $a^2 \in \mathrm{Par}_{\mathbb{Z}} \to a \in \mathrm{Par}_{\mathbb{Z}}$ *e* $a^2 \in \mathrm{Dis}_{\mathbb{Z}} \to a \in \mathrm{Dis}_{\mathbb{Z}}$,

(iii) $a \in \mathrm{Par}_{\mathbb{Z}} \to a \cdot b \in \mathrm{Par}_{\mathbb{Z}}$ *e* $a, b \in \mathrm{Dis}_{\mathbb{Z}} \to a \cdot b \in \mathrm{Dis}_{\mathbb{Z}}$.

Dimostrazione.

(i) $a \in \mathrm{Par}_{\mathbb{Z}}$ significa che esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $a = 2k$. Allora:

$$a^2 = (2k)^2 = 2^2 k^2 = 2(2k^2) \in \mathrm{Par}_{\mathbb{Z}}.$$

$a \in \mathrm{Dis}_{\mathbb{Z}}$ significa che esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $a = 2k + 1$. Allora:

$$a^2 = (2k+1)^2 = 2^2 k^2 + 2^2 k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \in \mathrm{Dis}_{\mathbb{Z}}.$$

(ii) Sia $a^2 \in \mathrm{Par}_{\mathbb{Z}}$. Se $a \in \mathrm{Dis}_{\mathbb{Z}}$, per il punto (i) segue che $a^2 \in \mathrm{Dis}_{\mathbb{Z}}$, assurdo. Quindi $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathrm{Dis} = \mathrm{Par}_{\mathbb{Z}}$.

Sia $a^2 \in \mathrm{Dis}_{\mathbb{Z}}$. Se $a \in \mathrm{Par}_{\mathbb{Z}}$, per il punto (i) segue che $a^2 \in \mathrm{Par}_{\mathbb{Z}}$, assurdo. Quindi $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathrm{Par} = \mathrm{Dis}_{\mathbb{Z}}$.

Il punto rimanente è lasciato per esercizio. ■

Lemma 1.29. *Non esiste un numero razionale $q \in \mathbb{Q}$ tale che $q^2 = 2$.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista $q \in \mathbb{Q}$ tale che $q^2 = 2$. Possiamo scrivere

$$q = \frac{a}{b}$$

dove $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Senza perdita di generalità, possiamo assumere che a e b non abbiano divisori comuni (perché?). Allora:

$$2 = q^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

da cui

$$2b^2 = a^2.$$

In particolare, $a^2 \in \mathrm{Par}_{\mathbb{Z}}$. Dal Lemma 1.28 segue che $a \in \mathrm{Par}_{\mathbb{Z}}$, ovvero esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $a = 2k$. Quindi

$$2b^2 = a^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

da cui

$$b^2 = 2k^2.$$

In particolare, $b^2 \in \mathrm{Par}_{\mathbb{Z}}$. Dal Lemma 1.28 segue che $b \in \mathrm{Par}_{\mathbb{Z}}$, ovvero esiste $l \in \mathbb{Z}$ tale che $b = 2l$. Abbiamo ottenuto che 2 è un divisore comune di a e b, assurdo. In conclusione, non esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $q^2 = 2$. ■

Esercizi

Esercizio 11. Completare la dimostrazione del Lemma 1.28.

2 Numeri reali

Definizione 2.1. L'insieme $\mathbb{R}$ dei *numeri reali* è l'insieme che soddisfa:

(i) gli assiomi dell'addizione,

(ii) gli assiomi della moltiplicazione,

(iii) l'assioma di distributività della moltiplicazione sull'addizione,

(iv) gli assiomi d'ordine (incluso l'assioma Archimedeo),

(v) l'assioma di completezza.

2.1 Addizione

Definizione 2.2 (Assiomi dell'addizione)**.** L'insieme $\mathbb{R}$ è provvisto di una funzione binaria

$$+\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, (a,b)\mapsto a+b \qquad (\textit{addizione})$$

che soddisfa

(i) *Associatività*:

$$\forall x \forall y \forall z \quad ((x+y)+z = x+(y+z)).$$

(ii) *Esistenza dell'elemento neutro*:

$$\exists y \forall x \quad (y+x = x).$$

Tale *elemento neutro* è indicato con 0.

(iii) *Esistenza degli elementi inversi*:

$$\forall x \exists y \quad (x + y = 0).$$

Dato x, il suo *elemento inverso* è indicato con $-x$.

(iv) *Commutatività*:

$$\forall x \forall y \quad (x + y = y + x).$$

Osservazione 2.3.

(i) L'elemento neutro 0 è univocamente determinato. Infatti, se esistessero gli elementi neutri 0 e $0'$, avremmo

$$\begin{aligned} 0 &= 0' + 0 && \text{perché } 0' \text{ è elemento neutro} \\ &= 0 + 0' && \text{per commutatività} \\ &= 0' && \text{perché } 0 \text{ è elemento neutro.} \end{aligned}$$

(ii) Dato $x \in \mathbb{R}$, il suo elemento inverso è univocamente determinato. Infatti, se esistessero gli elementi inversi $-x$ e $\sim x$, avremmo

$$\begin{aligned} -x &= 0 + (-x) && \text{perché } 0 \text{ è elemento neutro} \\ &= (x + (\sim x)) + (-x) && \text{perché } \sim x \text{ è elemento inverso} \\ &= ((\sim x) + x) + (-x) && \text{per commutatività} \\ &= (\sim x) + (x + (-x)) && \text{per associatività} \\ &= (\sim x) + 0 && \text{perché } -x \text{ è elemento inverso} \\ &= 0 + (\sim x) && \text{per commutatività} \\ &= \sim x && \text{perché } 0 \text{ è elemento neutro.} \end{aligned}$$

Definizione 2.4 (Sottrazione)**.** La *sottrazione* è la funzione

$$-\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + (-y).$$

Definizione 2.5 (Sommatoria)**.** Data una sequenza $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, scriviamo

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = x_1 + \ldots + x_n.$$

Più in generale:

$$\sum_{i=a}^{b} x_i = x_a + \ldots + x_b,$$

dove $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$.

2.2 Moltiplicazione

Definizione 2.6 (Assiomi della moltiplicazione)**.** L'insieme $\mathbb{R}$ dei *numeri reali* è l'insieme provvisto di una funzione binaria

$$\cdot\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, (a,b)\mapsto a\cdot b \qquad (\textit{moltiplicazione})$$

che soddisfa

(i) *Associatività*:
$$\forall x\forall y\forall z \quad ((x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)).$$

(ii) *Esistenza dell'elemento neutro*:
$$\exists y\forall x \quad (y\cdot x = x).$$
Tale *elemento neutro* è indicato con 1.

(iii) *Esistenza degli elementi inversi*:
$$\forall x \quad (x\neq 0\to\exists y(x\cdot y = 1)).$$
Dato x, il suo *elemento inverso* è indicato con $\frac{1}{x}$.

(iv) *Commutatività*:
$$\forall x\forall y \quad (x\cdot y = y\cdot x).$$

Osservazione 2.7.

(i) L'elemento neutro 1 è univocamente determinato.

(ii) Dato $x\in\mathbb{R}$, il suo elemento inverso è univocamente determinato.

I dettagli sono lasciati per esercizio.

Definizione 2.8. Dato $n\in\mathbb{N}$, identifichiamo

$$n = \underbrace{1+\ldots+1}_{n \text{ volte}}.$$

In questo modo, $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{R}$.

Definizione 2.9 (Divisione)**.** La *divisione* è la funzione

$$/\colon \mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})\to\mathbb{R}, (x,y)\mapsto x\cdot\frac{1}{y}.$$

Scriviamo anche $\frac{x}{y}$ per indicare x/y.

Definizione 2.10 (Produttoria)**.** Data una sequenza $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, scriviamo

$$\prod_{i=0}^{n} x_i = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n.$$

Più in generale:

$$\prod_{i=a}^{b} x_i = x_a \cdot \ldots \cdot x_b,$$

dove $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$.

Definizione 2.11 (Potenza)**.** Sia $a \in \mathbb{R}$, e sia $n \in \mathbb{N}$. L'n-esima potenza di a è definita come

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ a^{n-1} \cdot a & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Inoltre, se $a \neq 0$, definiamo

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

Osservazione 2.12. Se $n > 0$, possiamo scrivere

$$a^n = \prod_{i=1}^{n} a.$$

Proposizione 2.13 (Proprietà delle potenze)**.** *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e siano $m, n \in \mathbb{N}$. Allora:*

(i) $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$,

(ii) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$,

(iii) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.

Dimostrazione. Esercizio. ■

Proposizione 2.14 (Proprietà delle potenze)**.** *Siano $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e siano $m, n \in \mathbb{Z}$. Allora:*

(i) $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$,

(ii) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$,

(iii) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.

Dimostrazione. Esercizio. ■

2.3 Distributività

Definizione 2.15 (Assioma di distributività della moltiplicazione sull'addizione)**.**

$$\forall x \forall y \forall z \quad (x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)).$$

Proposizione 2.16. *Siano $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Allora:*

(i) $0 \cdot x = 0$,

(ii) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$,

(iii) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$,

(iv) $-(x + y) = -x - y$,

(v) *se $x, y \neq 0$, allora $x \cdot y \neq 0$,*

(vi) *se $x, y \neq 0$, allora $\frac{1}{x \cdot y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$,*

(vii) *se $z, w \neq 0$, allora*
$$\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{x \cdot y}{z \cdot w},$$

(viii) *se $z, w \neq 0$, allora*
$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{x \cdot w + y \cdot z}{z \cdot w},$$

(ix) *se $x \neq 0$ e $x \cdot y = x \cdot z$, allora $y = z$.*

Dimostrazione. Esercizio. ∎

2.4 Ordine, l'assioma Archimedeo

Definizione 2.17 (Assiomi d'ordine)**.** L'insieme $\mathbb{R}$ dei *numeri reali* è l'insieme provvisto di una proprietà $0 < x$ (da leggersi "*x è positivo*") che soddisfa

(i) *Tricotomia*:
$$\forall x \quad (0 < x \vee 0 = x \vee 0 < -x).$$

(ii) *Compatibilità con l'addizione*:
$$\forall x \forall y \quad ((0 < x \wedge 0 < y) \rightarrow 0 < x + y).$$

(iii) *Compatibilità con la moltiplicazione*:

$$\forall x \forall y \quad ((0 < x \wedge 0 < y) \to 0 < x \cdot y).$$

Definizione 2.18. Utilizziamo le seguenti abbreviazioni:

$y < x$	per	$0 < x - y,$
$x > y$	per	$y < x,$
$x \leqslant y$	per	$x < y \vee x = y,$
$x \geqslant y$	per	$x > y \vee x = y.$

Proposizione 2.19. *Siano $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Allora:*

(i) $0 < 1$,

(ii) $n > 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

(iii) se $x < 0$ *e* $y < 0$, *allora* $x \cdot y > 0$,

(iv) se $x > 0$ *e* $y < 0$, *allora* $x \cdot y < 0$,

(v) se $x \neq 0$, *allora* $x^2 > 0$,

(vi) se $x > 0$, *allora* $\frac{1}{x} > 0$,

(vii) se $x < y$ *e* $y < z$, *allora* $x < z$,

(viii) se $x < y$, *allora* $x + z < y + z$,

(ix) se $x < y$ *e* $z > 0$, *allora* $x \cdot z < y \cdot z$,

(x) se $x < y$ *e* $z < 0$, *allora* $x \cdot z > y \cdot z$,

(xi) se $0 < x$ *e* $x < y$, *allora* $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$,

(xii) se $x \cdot y = 0$, *allora* $x = 0 \vee y = 0$.

Dimostrazione. Esercizio. ■

Definizione 2.20 (Maggioranti, minoranti, supremi, infimi, massimi, minimi)**.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.

— L'insieme dei *maggioranti* di A è

$$\uparrow A = \{x \in \mathbb{R} \colon \forall a \in A (x \geqslant a)\}.$$

— L'insieme dei *minoranti* di A è

$$\downarrow A = \{x \in \mathbb{R} \colon \forall a \in A (x \leqslant a)\}.$$

— Il *supremo* (o *estremo superiore*) di A è l'elemento $\sup A$ tale che

$$\forall a \in A (\sup A \geqslant a) \qquad \text{e} \qquad \forall x \in \uparrow A (\sup A \leqslant x).$$

Se $\sup A \in A$, allora è detto *massimo*, e si scrive $\max A$.

— Il *infimo* (o *estremo inferiore*) di A è l'elemento $\inf A$ tale che

$$\forall a \in A (\inf A \leqslant a) \qquad \text{e} \qquad \forall x \in \downarrow A (\inf A \geqslant x).$$

Se $\inf A \in A$, allora è detto *minimo*, e si scrive $\min A$.

Osservazione 2.21.

— Se il supremo esiste, allora è univocamente determinato.

— Se l'infimo esiste, allora è univocamente determinato.

— Se A ha un numero finito di elementi, allora possiede massimo e minimo.

Definizione 2.22 (Valore assoluto)**.** Il *valore assoluto* è la funzione

$$|\_| \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Proposizione 2.23. *Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Allora:*

(i) $x = \max\{x, -x\}$,

(ii) $|x| \geqslant 0$,

(iii) $x \leqslant |x|$ *e* $-x \leqslant |x|$,

(iv) $|x| = |-x|$,

(v) $|x| = 0$ *se e solo se* $x = 0$,

(vi) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,

(vii) $|x|^2 = x^2$,

(viii) disuguaglianza triangolare*:* $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Dimostrazione. I punti (i)–(v) sono dati per esercizio.

(vi) Dall'assioma di tricotomia, abbiamo tre possibilità per x

$$0 < x \vee 0 = x \vee 0 < -x$$

e tre possibilità per y

$$0 < y \vee 0 = y \vee 0 < -y,$$

quindi nove combinazioni totali. Riassumiamo in una tabella:

x	y	$\lvert x\rvert$	$\lvert y\rvert$	$\lvert x\rvert \cdot \lvert y\rvert$	$x \cdot y$	$\lvert x \cdot y\rvert$
> 0	> 0	$= x$	$= y$	$= x \cdot y$	> 0	$= x \cdot y$
> 0	$= 0$	$= x$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$
> 0	< 0	$= x$	$= -y$	$= -x \cdot y$	< 0	$= -x \cdot y$
$= 0$	> 0	$= 0$	$= y$	$= 0$	$= 0$	$= 0$
$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$
$= 0$	< 0	$= 0$	$= -y$	$= 0$	$= 0$	$= 0$
< 0	> 0	$= -x$	$= y$	$= -x \cdot y$	< 0	$= -x \cdot y$
< 0	$= 0$	$= -x$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$
< 0	< 0	$= -x$	$= -y$	$= x \cdot y$	> 0	$= x \cdot y$

Osserviamo che $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ in tutti i casi.

(vii) Segue immediatamente dal punto (ii).

(viii) Dal punto (iii) abbiamo che $x \leqslant |x|$ e $y \leqslant |y|$, quindi:

$$x + y \leqslant |x| + |y|.$$

Dal punto (iii) abbiamo che $-x \leqslant |x|$ e $-y \leqslant |y|$, quindi:

$$-(x + y) = (-x) + (-y) \leqslant |x| + |y|.$$

Da (i) abbiamo quindi:

$$|x + y| = \max\{x + y, -(x + y)\} \leqslant |x| + |y|.$$ ∎

Definizione 2.24 (Assioma Archimedeo)**.**

$$\forall x \forall y \quad (x > 0 \wedge y > 0) \to \exists n \in \mathbb{N}(n \cdot x > y).$$

Lemma 2.25. *Per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che*

$$-n < x < n.$$

Dimostrazione. Per la tricotomia abbiamo tre possibilità:

— Se $x = 0$, possiamo prendere $n = 1$.

— Se $x > 0$, poiché $1 > 0$ allora per l'assioma Archimedeo esiste n tale che $n = n \cdot 1 > x$. Inoltre, $-n < 0 < x$.

— Se $x < 0$, allora $-x > 0$. Per il punto precedente, esiste n tale che $-n < -x < n$, da cui $-n < x < n$. ∎

Lemma 2.26. *Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che*

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Esercizio. ∎

Esercizi

Esercizio 1. Fornire i dettagli dell'Osservazione 2.7.

Esercizio 2. Dimostrare le Proposizioni 2.13, 2.14, 2.16, 2.19, e completare la dimostrazione della Proposizione 2.23.

Esercizio 3. Dimostrare il Lemma 2.26.

Esercizio 4. Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste uno ed un unico $k \in \mathbb{Z}$ tale che

$$k \leqslant x < k + 1.$$

Tale k è chiamato *pavimento* di x, ed è indicato come $\lfloor x \rfloor$.

Esercizio 5. Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste uno ed un unico $k \in \mathbb{Z}$ tale che

$$k - 1 < x \leqslant k.$$

Tale k è chiamato *soffitto* di x, ed è indicato come $\lceil x \rceil$.

Esercizio 6 (Disuguaglianza di Bernoulli)**.** Sia $a > -1$. Dimostrare per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ((1 + a)^n \geqslant 1 + n \cdot a).$$

Esercizio 7. Sia $a \in \mathbb{R}$. Dimostrare che:

(i) Se $a > 1$, allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $a^n > x$.

(ii) Se $0 < a < 1$, allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $a^n < x$.

2.5 Sequenze, l'assioma di completezza

Definizione 2.27. Una *sequenza di numeri reali* è una funzione $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

— Spesso scriviamo a_n invece di $a(n)$. Tale elemento è detto *n-esimo termine* della sequenza a.

— Per indicare a in maniera esplicita, possiamo usare le notazioni

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{oppure} \qquad (a_0, a_1, a_2, \dots).$$

Esempio 2.28.

(i) Fissato $c \in \mathbb{R}$, abbiamo la *sequenza costante*

$$\hat{c} = (c, c, c, c, \dots).$$

(ii) Abbiamo la *sequenza identità*:

$$(n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 2, 3, \dots).$$

(iii) La sequenza $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definita da

$$b_n = \frac{1}{n+1}$$

si può scrivere come:

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right).$$

(iv) La sequenza $d\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definita da

$$d_n = (-1)^n$$

si può scrivere come:

$$(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots).$$

(v) Fissato $x \in \mathbb{R}$, la sequenza $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ si può scrivere come:

$$\left(1, x, x^2, x^3, \dots\right).$$

(vi) La *sequenza di Fibonacci* $\mathtt{Fib}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è la sequenza definita da:

$$\mathtt{Fib}_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0, \\ 1 & \text{se } n = 1, \\ \mathtt{Fib}_{n-1} + \mathtt{Fib}_{n-2} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Essa si può scrivere come:

$$(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots).$$

Definizione 2.29. Sia $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una sequenza di numeri reali. Sia $x \in \mathbb{R}$. Se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geqslant N \quad (|a_n - x| < \varepsilon),$$

allora si dice che

— *a converge* a x, e che

— x è il *limite* di a.

Usiamo le notazioni:

$$a_n \xrightarrow{n} x \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = x.$$

Definizione 2.30. Una sequenza $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ si dice

(i) *convergente* se esiste x tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = x$,

(ii) *divergente* se non è convergente,

(iii) *limitata* se esiste $M > 0$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (|a_n| \leqslant M).$$

Definizione 2.31. Si consideri la sequenza divergente $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

— Se per ogni $r > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \geqslant N (a_n > r),$$

allora si dice che

– *a diverge* a $+\infty$ (*"più infinito"*), e che
– $+\infty$ è il *limite* di a.

Usiamo le notazioni:

$$a_n \xrightarrow{n} +\infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

— Se per ogni $r < 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \geqslant N (a_n < r),$$

allora si dice che

– *a diverge* a $-\infty$ (*"meno infinito"*), e che

– $-\infty$ è il *limite* di a.

Usiamo le notazioni:

$$a_n \xrightarrow{n} -\infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Definizione 2.32.

(i) Dati $a, b \in \mathbb{R}$, definiamo

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\} && (\textit{intervallo aperto}),\\
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \colon a \leqslant x \leqslant b\} && (\textit{intervallo chiuso}),\\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \colon a < x \leqslant b\},\\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \colon a \leqslant x < b\}.
\end{aligned}$$

(ii) Dati $x \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, l'insieme

$$B_x(r) = (x - r, x + r)$$

è detta *palla aperta centrata in x di raggio r*.

(iii) Dati $x \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, l'insieme

$$\overline{B}_x(r) = [x - r, x + r]$$

è detta *palla chiusa centrata in x di raggio r*.

Osservazione 2.33. $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geqslant N \quad (a_n \in B_x(\varepsilon)).$$

Proposizione 2.34 (Unicità del limite)**.** *Sia $a \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ convergente. Si ha*

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = x \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} a_n = y\right) \quad \to \quad x = y.$$

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Abbiamo $N, M \in \mathbb{N}$ tali che:

$$\forall n \geqslant N \left(|a_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}\right), \qquad \forall n \geqslant M \left(|a_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Quindi, per ogni $n \geqslant \max\{N, M\}$

$$\begin{aligned}
|x - y| &= |x - a_n + a_n - y|\\
&\leqslant |x - a_n| + |a_n - y|\\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Se supponiamo $x \neq y$, possiamo fissare $\varepsilon = \frac{|x-y|}{2}$ e ottenere

$$\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

contraddizione. ■

Proposizione 2.35. *Ogni successione* $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *convergente è limitata.*

Dimostrazione. Sia $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. Allora esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \geqslant N \quad (|a_n - x| < 1).$$

Quindi

$$\begin{aligned} |a_n| &= |a_n - x + x| \\ &\leqslant |a_n - x| + |x| \\ &< 1 + |x| \end{aligned}$$

per ogni $n \geqslant N_1$. Fissiamo

$$M = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |x|\}.$$

Abbiamo $|a_n| \leqslant M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. ■

Esempio 2.36.

(i) Fissato $c \in \mathbb{R}$, consideriamo la sequenza costante $\hat{c}$. Abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \hat{c} = c.$$

(ii) La sequenza identità $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente. Infatti, supponiamo che esista un limite x. Allora esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \geqslant N \quad \left(|n - x| < \frac{1}{4}\right).$$

In particolare devono valere

$$|N - x| < \frac{1}{4} \qquad \text{e} \qquad |N + 1 - x| < \frac{1}{4}.$$

Segue:

$$\begin{aligned} 1 &= |1 + (N - x) - (N - x)| \\ &\leqslant |N + 1 - x| + |N - x| \\ &< \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

contraddizione.

(iii) Abbiamo
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$
Infatti, sia $\varepsilon > 0$. Per il Lemma 2.26, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che
$$\frac{1}{N} < \varepsilon.$$
Inoltre osserviamo che per ogni $n \geqslant N$ si ha
$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N}$$
e, infine,
$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Proposizione 2.37. *Siano $a, b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sequenze convergenti, siano $x = \lim_{n\to\infty} a_n$ e $y = \lim_{n\to\infty} b_n$, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = x + y$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = x \cdot y$,

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \lambda x$,

(iv) se $y \neq 0$, allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $b_n \neq 0$ per ogni $n \geqslant n_0$ e
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b_{n+n_0}}\right) = \frac{1}{y} \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+n_0}}{b_{n+n_0}}\right) = \frac{x}{y}.$$

Dimostrazione.

(i) Fissiamo $\varepsilon > 0$. In particolare, $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Allora esistono $A, B \in \mathbb{N}$ tali che
$$\forall n \geqslant A \quad \left(|a_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \qquad \text{e} \qquad \forall n \geqslant B \quad \left(|b_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$
Sia $N = \max\{A, B\}$. Allora, per ogni $n \geqslant N$:
$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (x + y)| &= |(a_n - x) + (b_n - y)| \\ &\leqslant |a_n - x| + |b_n - y| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

(ii) Poiché a è convergente, dalla Proposizione 2.35 sappiamo che è limitata da qualche $M > 0$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. In particolare,

$$\frac{\varepsilon}{2 \cdot (|y| + 1)} > 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\varepsilon}{2 \cdot M} > 0.$$

Allora esistono $A, B \in \mathbb{N}$ tali che

$$\forall n \geqslant A \quad \left(|a_n - x| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot (|y| + 1)}\right) \quad \text{e} \quad \forall n \geqslant B \quad \left(|b_n - x| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot M}\right).$$

Allora, per ogni $n \geqslant N$:

$$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n - x \cdot y| &= |a_n \cdot b_n - a_n \cdot y + a_n \cdot y - x \cdot y| \\ &\leqslant |a_n \cdot b_n - a_n \cdot y| + |a_n \cdot y - x \cdot y| \\ &= |a_n \cdot (b_n - y)| + |(a_n - x) \cdot y| \\ &= |a_n| \cdot |b_n - y| + |a_n - x| \cdot |y| \\ &\leqslant M \cdot |b_n - y| + |a_n - x| \cdot |y| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot M} + \frac{\varepsilon}{2 \cdot (|y| + 1)} \cdot |y| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

I punti rimanenti sono lasciati per esercizio. ∎

Proposizione 2.38. *Siano $a, b \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sequenze convergenti, e siano $x = \lim_{n\to\infty} a_n$ e $y = \lim_{n\to\infty} b_n$. Se $a_n \leqslant b_n$ per ogni $n\mathbb{N}$, allora $x \leqslant y$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che non valga $x \leqslant y$, ovvero che valga $x > y$ (tricotomia). Sia $\varepsilon = x - y$. Poiché $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, esiste $A \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geqslant A$,

$$\begin{aligned} |a_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} &\iff -\frac{\varepsilon}{2} < a_n - x < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\iff x - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < x + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\iff x - \frac{x - y}{2} < a_n < x + \frac{x - y}{2} \\ &\iff \frac{x + y}{2} < a_n < \frac{3x - y}{2} \end{aligned}$$

Poiché $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, esiste $B \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geqslant B$,

$$\begin{aligned}|b_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} &\iff -\frac{\varepsilon}{2} < b_n - y < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\iff y - \frac{\varepsilon}{2} < b_n < y + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\iff y - \frac{x-y}{2} < b_n < y + \frac{x-y}{2} \\ &\iff \frac{-x+y}{2} < b_n < \frac{x+y}{2}\end{aligned}$$

Sia $N = \max\{A, B\}$. Allora, per ogni $n \geqslant N$ si ha:

$$b_n < \frac{x+y}{2} < a_n,$$

contraddizione. Quindi $x \leqslant y$. ■

Definizione 2.39. Una sequenza $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è detta *sequenza di Cauchy* se

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists C \in \mathbb{N} \, \forall m, n \geqslant C \quad (|a_n - a_m| < \varepsilon).$$

Proposizione 2.40. *Ogni sequenza convergente è una sequenza di Cauchy.*

Dimostrazione. Sia $x = \lim_{n\to\infty} a_n$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \geqslant N \quad \left(|a_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Allora, fissati $n, m \geqslant N$ si ha:

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &= |a_n - x + x - a_m| \\ &\leqslant |a_n - x| + |a_m - x| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$ ■

Definizione 2.41 (Assioma di completezza)**.** Ogni sequenza di Cauchy è convergente.

Teorema 2.42 (Esistenza della radice quadrata)**.** *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ positivi. Definiamo:*

$$\alpha_n = \begin{cases} b & \text{se } n = 0, \\ \frac{1}{2}\left(\alpha_{n-1} + \frac{a}{\alpha_{n-1}}\right) & \text{se } n > 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad \beta_n = \frac{a}{\alpha_n}.$$

Allora:

(i) $\alpha_n > 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $(\alpha_n)^2 \geqslant a$ *per ogni* $n \geqslant 1$.

(iii) $\alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n$ *per ogni* $n \geqslant 1$.

(iv) $(\beta_n)^2 \leqslant a$ *per ogni* $n \geqslant 1$.

(v) $\beta_n \leqslant \alpha_m$ *per ogni* $m, n \geqslant 1$.

(vi)

$$\alpha_n - \beta_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}(\alpha_1 - \beta_1)$$

per ogni $n \geqslant 1$.

(vii) α *è una sequenza di Cauchy.*

(viii) *Sia* $x = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$. *Allora* $x > 0$ *e* $x^2 = a$.

Dimostrazione. Esercizio. ∎

Osservazione 2.43. L'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ non soddisfa l'assioma di completezza (ma soddisfa tutti gli altri assiomi dei numeri reali).

Osservazione 2.44. Poiché, ad esempio, $\sqrt{2}$, segue che $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

Definizione 2.45. L'insieme dei *numeri irrazionali* è definito come

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Esercizi

Esercizio 8. Scrivere i primi 10 termini

(i) della sequenza $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definita da

$$h_n = \frac{n}{n+1},$$

(ii) della sequenza $k\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definita da

$$k_n = \frac{n}{2^n}.$$

In entrambi i casi, dire se la sequenza è convergente. In caso affermativo trovare il limite, in caso negativo motivare la risposta.

Esercizio 9. Dire se le seguenti sequenze sono convergenti. In caso affermativo trovare il limite, in caso negativo motivare la risposta.

(i) $d_n = (-1)^n$.

(ii) $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$, dove $x \in \mathbb{R}$.
Suggerimento: Distinguere i casi $x < -1$, $x = -1$, $-1 < x < 0$, $x = 0$, $0 < x < 1$, $x = 1$, $x > 1$.

Esercizio 10. Si consideri la sequenza di Fibonacci $\mathtt{Fib}$.

(i) Dimostrare che $\mathtt{Fib}$ è divergente.

(ii) Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathtt{Fib}_{n+1}}{\mathtt{Fib}_n} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

(iii) Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathtt{Fib}_{n}}{\mathtt{Fib}_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Esercizio 11. Completare la dimostrazione della Proposizione 2.37.

Esercizio 12.

(i) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot n^2 + 14\cdot n}{n^2 - 2}.$$

(ii) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot n^2 + 14\cdot n}{n^3 - 2}.$$

(iii) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot n^3 + 14\cdot n}{n^2 - 2}.$$

Esercizio 13. Dimostrare il Teorema 2.42.
Suggerimenti:

(i) Utilizzare il metodo di dimostrazione per induzione.

(ii) Osservare che $(\alpha_n)^2 - a \geqslant 0$.

(iii) Utilizzare i punti precedenti.

Esercizio 14 (Esistenza della radice k-esima)**.** Siano $a, b \in \mathbb{R}$ positivi. Definiamo:

$$\alpha_n = \begin{cases} b & \text{se } n = 0, \\ \frac{1}{k}\left((k-1)\alpha_{n-1} + \frac{a}{(\alpha_{n-1})^{k-1}}\right) & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Allora:

(i) $\alpha_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(ii) α è una sequenza di Cauchy.

(iii) Sia $x = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$. Allora $x > 0$ e $x^k = a$.

2.6 Somme infinite

Definizione 2.46. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sequenza di numeri reali. La *sequenza di somme parziali* di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è la sequenza

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Ovvero:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0, \\ s_1 &= a_0 + a_1, \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2, \\ &\vdots \\ s_n &= a_0 + a_1 + \ldots + a_n, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Scriviamo:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots.$$

Più in generale, per $m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=m}^{m+n} a_i\right) = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+n} + \ldots.$$

Esempio 2.47.

(i) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sequenza costante $\hat{0}$. Allora:

$$\sum_{i=0}^{\infty} 0 = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} 0\right) = \lim_{n\to\infty}(\underbrace{0+\ldots+0}_{n+1 \text{ volte}}) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

(ii) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sequenza costante $\hat{1}$. Allora:

$$\sum_{i=0}^{\infty} 1 = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} 1\right) = \lim_{n\to\infty}(\underbrace{1+\ldots+1}_{n+1 \text{ volte}}) = \lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty.$$

(iii) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sequenza costante $(\widehat{-1})$. Allora:

$$\sum_{i=0}^{\infty} -1 = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} (-1)\right) = \lim_{n\to\infty}(\underbrace{-1-\ldots-1}_{n+1 \text{ volte}}) = \lim_{n\to\infty} -(n+1) = -\infty.$$

(iv) Si consideri la sequenza $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Allora:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i = \begin{cases} \underbrace{(1-1)+\ldots+(1-1)}_{k \text{ volte}}+1 = 1 & \text{se } n = 2k \text{ (pari)} \\ \underbrace{(1-1)+\ldots+(1-1)}_{k+1 \text{ volte}} = 0 & \text{se } n = 2k+1 \text{ (dispari)} \end{cases}$$

Quindi la sequenza delle somme parziali diverge.

Osservazione 2.48. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sequenza di numeri reali. Osserviamo che, se $n > 0$:

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) \\ &= a_0 + \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i) \\ &= a_0 + \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}). \end{aligned}$$

Questa è detta *scrittura telescopica* di a_n.

Osservazione 2.49. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sequenza di numeri reali. Allora:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}(a_i - a_{i-1}) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})\\ &= \lim_{n\to\infty}(a_n - a_0)\\ &= \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) - a_0.\end{aligned}$$

Esempio 2.50. Supponiamo di voler calcolare

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)}.$$

Osserviamo:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n^2 - n^2 + 1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n},$$

quindi possiamo considerare la sequenza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita da:

$$a_n = \frac{n}{n+1}.$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)} &= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\right) - \frac{0}{1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\\ &= 1.\end{aligned}$$

Proposizione 2.51. *Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequenze di numeri reali tali che*

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \qquad e \qquad y = \sum_{i=0}^{\infty} b_i,$$

e siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Allora:

$$\sum_{i=0}^{\infty}(\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda x + \mu y.$$

Dimostrazione. Segue direttamente dalla Proposizione 2.37. ■

Osservazione 2.52 (Serie geometriche infinite)**.** Sia $x \in \mathbb{R}$ tale che $|x| < 1$. Allora:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}.$$

Infatti, per $n \in \mathbb{N}$ abbiamo:

$$\begin{aligned}
(1-x)\left(\sum_{i=0}^{n} x^i\right) &= \sum_{i=0}^{n}((1-x)(x^i)) \\
&= \sum_{i=0}^{n}(x^i - x^{i+1}) \\
&= -\sum_{i=0}^{n}(x^{i+1} - x^i) \\
&= -\left(\sum_{i=0}^{n-1}(x^{i+1} - x^i) + (x^{n+1} - x^n)\right) \\
&= -\big((x^n - x^0) + (x^{n+1} - x^n)\big) \\
&= 1 - x^{n+1}.
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} x^i &= \lim_{n\to\infty} \frac{(1-x)\left(\sum_{i=0}^{n} x^i\right)}{1-x} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \\
&= \frac{1}{1-x}.
\end{aligned}$$

Proposizione 2.53 (Criterio di convergenza di Cauchy)**.** *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sequenza di numeri reali. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) La sequenza di somme parziali di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(b) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $C \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \geqslant m \geqslant C\left(\left|\sum_{i=m+1}^{n} a_i\right| < \varepsilon\right).$$

Dimostrazione (idea). Segue dall'assioma di compattezza. ■

Corollario 2.54. *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sequenza di numeri reali. Se la sequenza di somme parziali di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, allora*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dimostrazione. Segue dal criterio di convergenza di Cauchy fissando $m = n-1$: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $C \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \geqslant C+1 \left(\left| \underbrace{\sum_{i=n}^{n} a_i}_{a_n} \right| < \varepsilon \right).$$ ■

Osservazione 2.55. N.B.! In generale, la direzione opposta non è valida! Infatti, ad esempio,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i} = +\infty \qquad \text{ma} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Corollario 2.56 (Criterio di non-convergenza)**.** *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sequenza di numeri reali. Se*

— $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge, oppure*

— $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$,

allora la sequenza di somme parziali di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Dimostrazione. Segue direttamente dal Corollario precedente. ■

Definizione 2.57. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sequenza di numeri reali. Si dice che la sua sequenza di somme parziali *converge assolutamente* se la sequenza

$$\left(\sum_{i=0}^{n} |a_i| \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

converge.

Proposizione 2.58. *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sequenza di numeri reali. Se la sequenza di somme parziali converge assolutamente, allora converge.*

Dimostrazione. Esercizio. ■

Proposizione 2.59 (Test del confronto)**.** *Siano* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sequenze di numeri reali tali che*

(i) $\forall n \in \mathbb{N}(|a_n| \leqslant b_n)$, *e*

(ii) la sequenza delle somme parziali di $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

Allora la sequenza delle somme parziali di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge assolutamente.*

Dimostrazione (idea). Segue dal criterio di convergenza di Cauchy. ∎

Proposizione 2.60 (Test del quoziente)**.** *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sequenza di numeri reali e sia*

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Abbiamo:

— *Se* $L < 1$*, allora la sequenza delle somme parziali converge assolutamente.*

— *Se* $L > 1$*, allora la sequenza delle somme parziali diverge.*

Dimostrazione (idea). Segue dal test del confronto. ∎

Esercizi

Esercizio 15. Calcolare

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{5}{i(i+1)}.$$

Esercizio 16. Calcolare

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i.$$

Esercizio 17. Dimostrare la Proposizione 2.58.

Esercizio 18. Sia $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Dimostrare che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^k}$$

converge. Suggerimento: Usare il test del confronto.

Esercizio 19. Dimostrare che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2}{2^i}$$

converge. Suggerimento: Usare il test del quoziente.

Esercizio 20. Calcolare

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4i^2 - 1}.$$

Suggerimento: Utilizzare il fatto che

$$\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Esercizio 21. Siano $x, y \in \mathbb{R}$, e sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sequenza di numeri reali definita da:

$$a_n = \begin{cases} x & \text{se } n = 0 \\ y & \text{se } n = 1 \\ \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}(x + 2y).$$

Traccia di svolgimento:

— Dimostrare che, per $k \geqslant 1$,

$$a_{i+1} - a_i = -\frac{1}{2}(a_i - a_{i-1}).$$

— Dimostrare che, per $k \in \mathbb{N}$,

$$a_{i+1} - a_i = \left(-\frac{1}{2}\right)^i (y - x).$$

— Dimostrare che, per $n \geqslant 1$,

$$a_n = x + (y - x) \sum_{i=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^i.$$

3 Funzioni reali di variabile reale

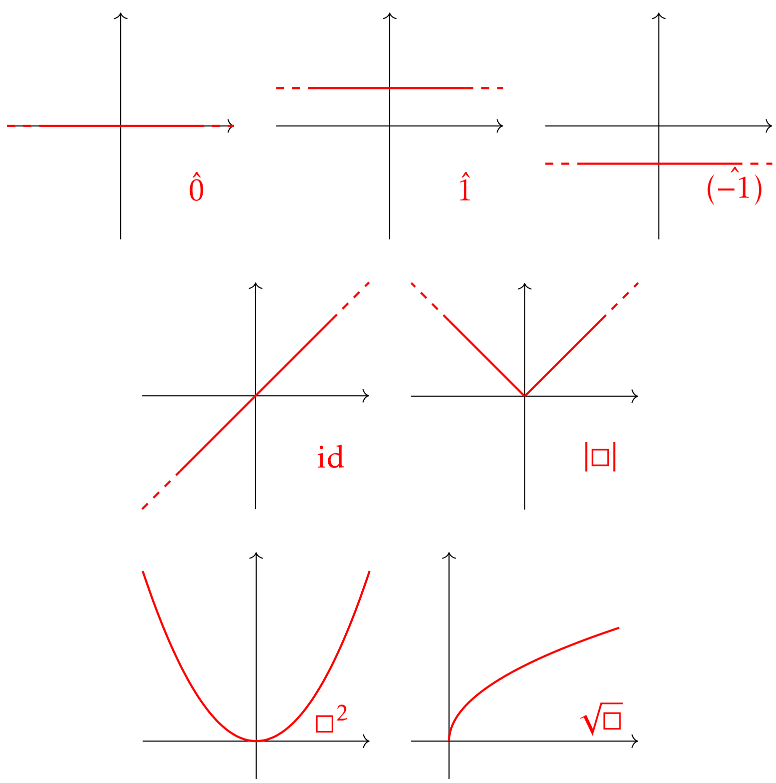
3.1 Il grafico delle funzioni reali

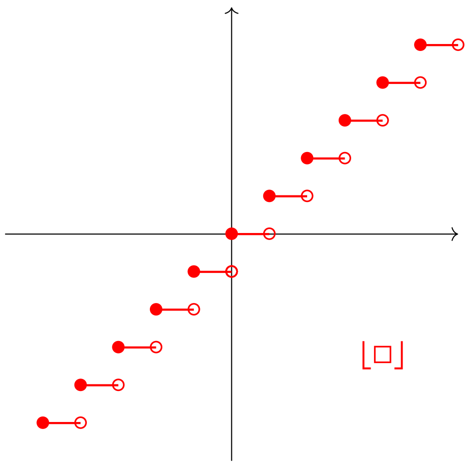
Definizione 3.1. Una *funzione reale di variabile reale* è una funzione $f: D \to \mathbb{R}$, dove $D \subseteq \mathbb{R}$. Il *grafico* di f è l'insieme

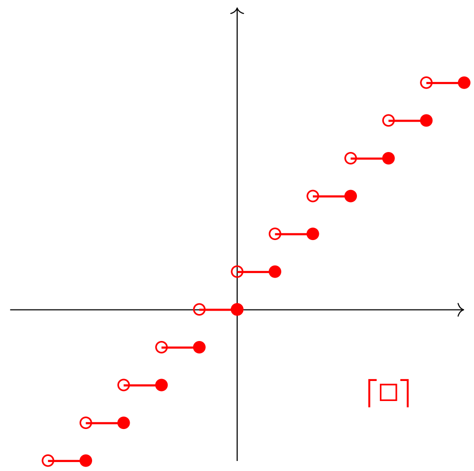
$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \colon y = f(x)\}.$$

In genere il grafico viene rappresentato sul piano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Esempio 3.2. Alcuni grafici di funzioni note:







Definizione 3.3. Sia $D \subseteq \mathbb{R}$, siano $f, g\colon D \to \mathbb{R}$, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Definiamo le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} f+g\colon D \to \mathbb{R}, x &\mapsto f(x)+g(x), \\ \lambda f\colon D \to \mathbb{R}, x &\mapsto \lambda \cdot f(x), \\ f\cdot g\colon D \to \mathbb{R}, x &\mapsto f(x)\cdot g(x), \\ \frac{f}{g}\colon D^* \to \mathbb{R}, x &\mapsto \frac{f(x)}{g(x)}, \end{aligned}$$

dove $D^* = \{x \in D\colon g(x) \neq 0\}$.

Esempio 3.4. Una *funzione polinomiale* è una funzione p della forma

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \operatorname{id}^i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n.$$

Se $a_n \neq 0$, allora n è detto *grado* di p.

Le funzioni $\hat{c}, \operatorname{id}, \square^2$ sono esempi di funzioni polinomiali.

Esempio 3.5. Se $p, q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono funzioni polinomiali, allora la funzione

$$\frac{p}{q}\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

è detta *funzione razionale*.

Osservazione 3.6. Siano $D, E \subseteq \mathbb{R}$, e siano $f\colon D \to \mathbb{R}$ e $g\colon E \mapsto \mathbb{R}$ tali che $\operatorname{Im}(f) \subseteq E$. Allora possiamo fare la *composizione*:

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & E \arrow[r, "g"'] & \mathbb{R}.
\end{tikzcd}
$$

Esempio 3.7. Consideriamo

$$
\begin{aligned}
f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2,\\
g\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}.
\end{aligned}
$$

Osserviamo che $\mathrm{Im}(f) = [0,+\infty)$, quindi abbiamo la composizione:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & {[0,+\infty)} \arrow[r, "g"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
$$

dove $g \circ f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$.

3.2 Funzioni elementari

Proposizione 3.8. *Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora la* serie esponenziale[1]

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

converge assolutamente.

Dimostrazione. Esercizio. ∎

Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora la *serie esponenziale*[2]

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

[1]Si utilizza il *fattoriale*:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0,\\ \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n & \text{se } n \geqslant 1. \end{cases}$$

[2]Si utilizza il *fattoriale*:

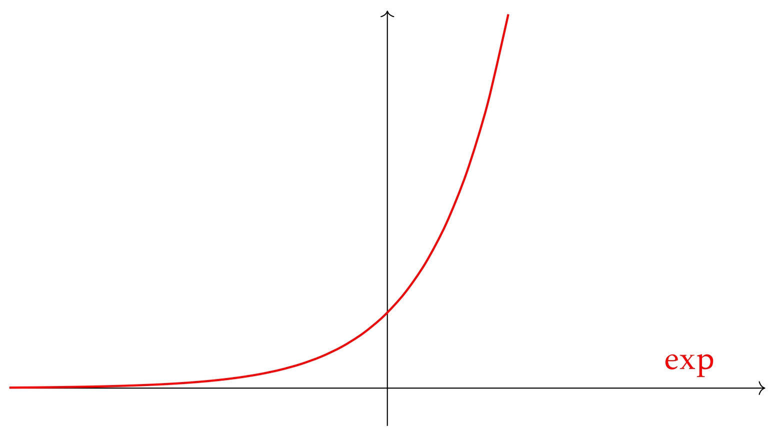
$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0,\\ \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n & \text{se } n \geqslant 1. \end{cases}$$

converge assolutamente.

Definizione 3.9. Il *numero di Eulero* (noto anche come *numero di Nepero*) è definito come:

$$e = \exp(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots \approx 2.71828$$

La *funzione esponenziale* è la funzione $\exp \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Proposizione 3.10 (Proprietà dell'esponenziale)**.** *Per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ *e* $k \in \mathbb{Z}$ *vale:*

(i) $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$,

(ii) $\exp(x) > 0$,

(iii) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$,

(iv) $\exp(n) = e^n$,

(v) $\exp(k) = e^k$.

Dimostrazione. Esercizio. ■

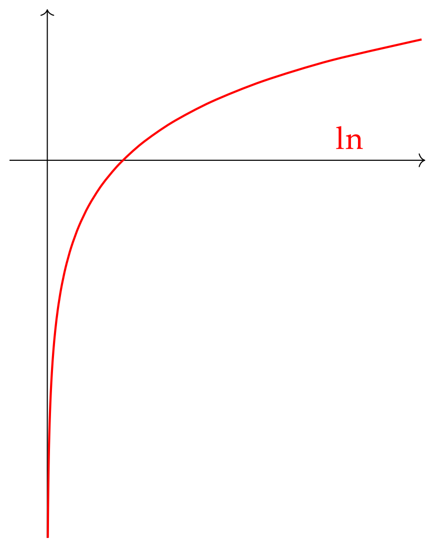
Osservazione 3.11. Il punto (v) della Proposizione precedente è il motivo per cui la funzione è detta "esponenziale". Per lo stesso motivo, spesso utilizziamo e^x al posto di $\exp(x)$ anche per $x \in \mathbb{R}$.

Proposizione 3.12. *Esiste una funzione* $\ln \colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *tale che, per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$

$$e^x = y \iff \ln y = x.$$

Tale funzione è detta logaritmo naturale.

Dimostrazione (idea). Segue dall'esercizio 3. ■



Definizione 3.13. Sia $b \in (0, +\infty)$.

(i) La funzione *esponenziale di base b* è definita come

$$b^{\square} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(\ln(b) \cdot x).$$

(ii) La funzione *logaritmo in base b* è definita come

$$\log_b \colon (0, +\infty), x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$$

Proposizione 3.14. *Per ogni $x, x' \in \mathbb{R}$:*

$$\ln(x \cdot x') = \ln(x) + \ln(x').$$

Dimostrazione. Esercizio. ■

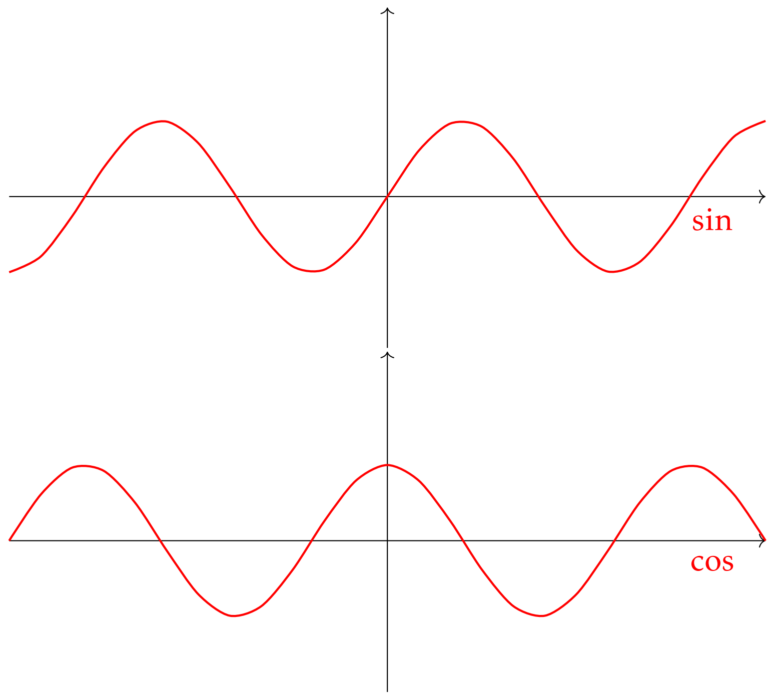
Proposizione 3.15. *Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora*

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \tag{seno}$$

$$\cos(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \tag{coseno}$$

convergono assolutamente.

Dimostrazione. Esercizio. ■



Definizione 3.16.

(i) La funzione *tangente* è definita come:

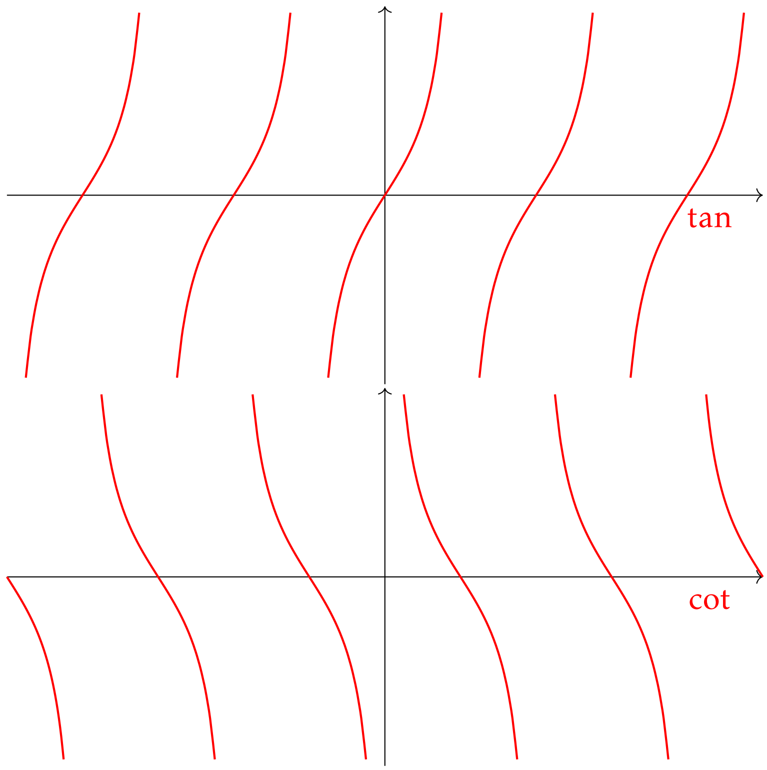
$$\tan\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)},$$

dove $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$.

(ii) La funzione *cotangente* è definita come:

$$\cot\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)},$$

dove $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$.



3.3 Continuità e limiti di funzioni

Definizione 3.17.

(i) Sia $x \in \mathbb{R}$. Diciamo che l'insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ è un *intorno* di x se esiste $r > 0$ tale che
$$B_x(r) \subseteq D.$$

(ii) Diciamo che l'insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ è un *intorno* di $+\infty$ se esiste $r \in \mathbb{R}$ tale che
$$(r, +\infty) \subseteq D.$$

(iii) Diciamo che l'insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ è un *intorno* di $-\infty$ se esiste $r \in \mathbb{R}$ tale che
$$(-\infty, r) \subseteq D.$$

Definizione 3.18. Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia D un intorno di c. Sia $f : D \to \mathbb{R}$.

(i) Sia $l \in \mathbb{R}$. Se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:
$$x \in B_c(\delta) \setminus \{c\} \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in B_l(\varepsilon),$$

allora diciamo che l è il *limite* di f in c e scriviamo

$$\lim_{x \to c} f(x) = l.$$

(ii) Se

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c),$$

allora diciamo che f è *continua* in c.

(iii) Se f è continua in tutti i punti di D, allora diciamo che f è continua in D.

Definizione 3.19. Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia D un intorno di c. Sia $f : D \to \mathbb{R}$ e sia $l \in \mathbb{R}$.

(i) Se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$x \in (c - \delta, c) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in B_l(\varepsilon),$$

allora diciamo che l è il *limite sinistro* di f in c e scriviamo

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = l.$$

(ii) Se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$x \in (c, c + \delta) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in B_l(\varepsilon),$$

allora diciamo che l è il *limite destro* di f in c e scriviamo

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = l.$$

Esempio 3.20. Consideriamo la funzione pavimento $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \lfloor x \rfloor$. Osserviamo:

(i) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \lfloor x \rfloor = 0 = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor$, quindi f è continua in $\frac{1}{2}$.

Infatti, sia $\varepsilon > 0$. Scegliamo $\delta = \frac{1}{2}$. Abbiamo

$$B_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} = \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right),$$

quindi se $x \in B_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)$ abbiamo $f(x) = \lfloor x \rfloor = 0 \in B_0(\varepsilon)$.

(ii) $\lim_{x\to 0^-} \lfloor x \rfloor = -1 \neq 0 = \lim_{x\to 0^+} \lfloor x \rfloor$, quindi non esiste il limite di f in 0 e, di conseguenza, f non è continua in 0.

Infatti, sia $\varepsilon > 0$. Scegliamo $\delta = 1$. Da $x \in (-1, 0)$ segue $f(x) = \lfloor x \rfloor = -1 \in B_{-1}(\varepsilon)$; mentre da $x \in (0, 1)$ segue $f(x) = \lfloor x \rfloor = 0 \in B_0(\varepsilon)$.

Definizione 3.21. Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia D un intorno di c. Sia $f : D \to \mathbb{R}$.

(i) Sia $l \in \mathbb{R}$. Se, per ogni $r > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$x \in B_c(\delta) \setminus \{c\} \quad \Longrightarrow \quad f(x) > r,$$

allora diciamo che $+\infty$ è il *limite* di f in c e scriviamo

$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty.$$

Il limite è *sinistro* se si considera solo $(c - \delta, c)$ invece di $B_c(\delta)$, *destro* se si considera solo $(c, c + \delta)$ invece di $B_c(\delta)$.

(ii) Sia $l \in \mathbb{R}$. Se, per ogni $r < 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$x \in B_c(\delta) \setminus \{c\} \quad \Longrightarrow \quad f(x) < r,$$

allora diciamo che $-\infty$ è il *limite* di f in c e scriviamo

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty.$$

Il limite è *sinistro* se si considera solo $(c - \delta, c)$ invece di $B_c(\delta)$, *destro* se si considera solo $(c, c + \delta)$ invece di $B_c(\delta)$.

Definizione 3.22. Sia D un intorno di $+\infty$, e sia $f : D \to \mathbb{R}$.

(i) Sia $l \in \mathbb{R}$. Se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $r \in \mathbb{R}$ tale che:

$$x > r \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in B_l(\varepsilon),$$

allora diciamo che l è il *limite* di f in $+\infty$ e scriviamo

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = l.$$

(ii) Se, per ogni $s > 0$ esiste $r \in \mathbb{R}$ tale che:

$$x > r \quad \Longrightarrow \quad f(x) > s,$$

allora diciamo che $+\infty$ è il *limite* di f in $+\infty$ e scriviamo

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

(iii) Se, per ogni $s < 0$ esiste $r \in \mathbb{R}$ tale che:

$$x > r \quad \Longrightarrow \quad f(x) < s,$$

allora diciamo che $-\infty$ è il *limite* di f in $+\infty$ e scriviamo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Definizione 3.23. Sia D un intorno di $-\infty$, e sia $f : D \to \mathbb{R}$.

(i) Sia $l \in \mathbb{R}$. Se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $r \in \mathbb{R}$ tale che:

$$x < r \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in B_l(\varepsilon),$$

allora diciamo che l è il *limite* di f in $-\infty$ e scriviamo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l.$$

(ii) Se, per ogni $s > 0$ esiste $r \in \mathbb{R}$ tale che:

$$x < r \quad \Longrightarrow \quad f(x) > s,$$

allora diciamo che $+\infty$ è il *limite* di f in $-\infty$ e scriviamo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

(iii) Se, per ogni $s < 0$ esiste $r \in \mathbb{R}$ tale che:

$$x < r \quad \Longrightarrow \quad f(x) < s,$$

allora diciamo che $-\infty$ è il *limite* di f in $-\infty$ e scriviamo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Proposizione 3.24. *Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia D un intorno di c. Siano $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(i) Se f e g sono continue in c, allora le funzioni $f+g, \lambda f, f \cdot g$ sono continue in c.

Se, inoltre, $g(x) \neq 0$ in un intorno di c, allora anche $\frac{f}{g}$ è continua in c.

(ii) Se f e g sono continue in D, allora le funzioni $f+g, \lambda f, f \cdot g$ sono continue in D.

Se f e g sono continue in D^*, allora anche $\frac{f}{g}$ è continua in D^*.

Dimostrazione. Esercizio. ■

Proposizione 3.25. *Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia D un intorno di c. Siano $f\colon D \to \mathbb{R}$ e $g\colon E \to \mathbb{R}$ tali che $\operatorname{Im}(f) \subseteq E$.*

(i) Se f è continua in c e g è continua in $f(c)$, allora la funzione $g \circ f$ è continua in c.

(ii) Se f è continua in D e g è continua in E, allora la funzione $f \circ g$ è continua in D.

Dimostrazione. Esercizio. ■

Teorema 3.26 (Teorema del valore intermedio)**.** *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$, e sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste $c \in (a,b)$ tale che $f(c) = 0$.*

Corollario 3.27. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$, e sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$. Allora:*

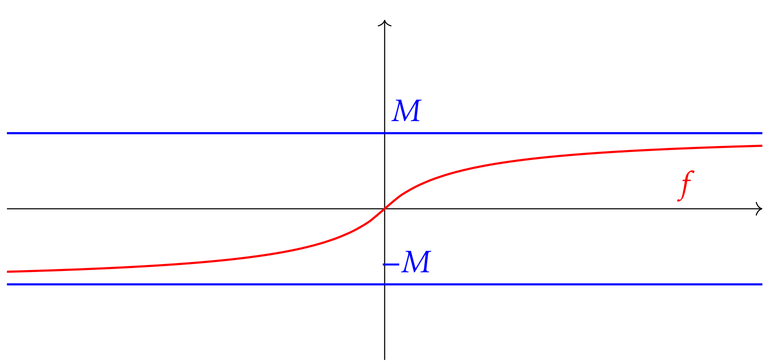
— *Se $f(a) < f(b)$ ed esiste $d \in (f(a), f(b))$, allora esiste $c \in (a,b)$ tale che $f(c) = d$.*

— *Se $f(b) < f(a)$ ed esiste $d \in (f(b), f(a))$, allora esiste $c \in (a,b)$ tale che $f(c) = d$.*

Dimostrazione. Segue direttamente dal teorema del valore intermedio applicato alla funzione
$$x \mapsto f(x) - d.$$ ■

Definizione 3.28. Una funzione reale di variabile reale $f\colon D \to \mathbb{R}$ è detta *limitata* se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall x \in D \quad (|f(x)| \leqslant M).$$



Teorema 3.29. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$, e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$. Allora esistono $c, d \in [a, b]$ tali che*

$$\forall x \in [a, b] \quad (f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d)).$$

Esercizi

Esercizio 1. Dimostrare la Proposizione 3.8.
Suggerimento: Utilizzare il criterio del quoziente.

Esercizio 2. Dimostrare la Proposizione 3.10.

Esercizio 3. Dimostrare che:

(i) se $x < x'$, allora $\exp(x) < \exp(x')$,

(ii) $\mathrm{Im}(\exp) = (0, +\infty)$,

(iii) exp è iniettiva,

(iv) se $\exp(x) < \exp(x')$, allora $x < x'$.

Esercizio 4. Dimostrare che:

(i) se $x < x'$, allora $\ln(x) < \ln(x')$,

(ii) $\mathrm{Im}(\exp) = \mathbb{R}$,

(iii) ln è iniettiva,

(iv) ln è biiettiva.

Esercizio 5. Dimostrare la Proposizione 3.14.

Esercizio 6. Dimostrare la Proposizione 3.15.
Suggerimento: Utilizzare il fatto che $\exp(x)$ converge assolutamente.

Esercizio 7. Dimostrare le Proposizioni 3.24 e 3.25.

Esercizio 8. Dimostrare che le seguenti funzioni sono continue nel loro dominio:

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$,

(ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$,

(iii) $g \circ f$.

Esercizio 9. Dimostrare che le funzioni polinomiali e le funzioni razionali sono continue nel loro dominio.

Esercizio 10. Dimostrare che le funzioni $\exp, \sin, \cos, \tan, \cot$ sono continue nel loro dominio.

Esercizio 11. Sia p una funzione polinomiale di grado $n = 2k+1$ dispari, ovvero:
$$p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{2k+1} x^{2k+1}.$$
Dimostrare che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(c) = 0$.
Suggerimento: Utilizzare il teorema del valore intermedio.

Esercizio 12. Sia p una funzione polinomiale di grado $n = 2k$ pari, ovvero:
$$p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{2k} x^{2k}.$$
Dimostrare che non è detto che esista $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(c) = 0$.
Suggerimento: Osservare che $x^2 \geqslant 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$...

Esercizio 13. Dimostrare che
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

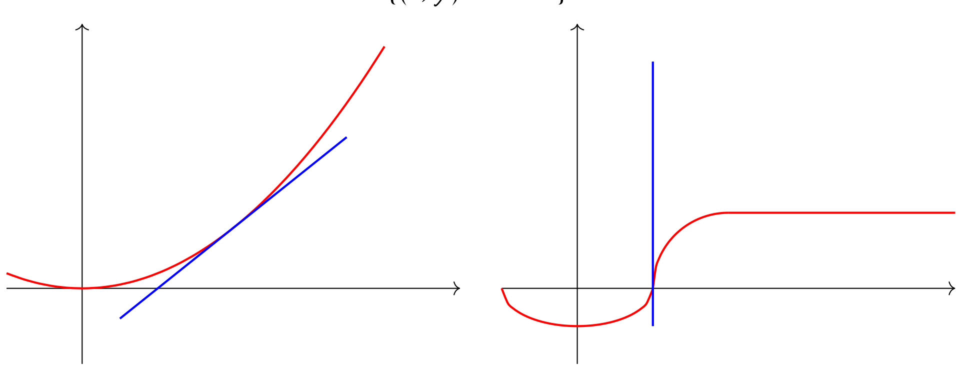
Esercizio 14. Dimostrare che
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

4 Derivate

Definizione 4.1.

- Siano $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ e $c \in D$. Si dice che f è *differenziabile* (o *derivabile*) in c se esiste
$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$
- Il valore $f'(c)$ è chiamato *derivata* di f in c.
- La funzione f è detta differenziabile in D se è differenziabile in ogni punto di D.
- La funzione $f'\colon x \mapsto f'(x)$ è la *funzione derivata* di f.

Definizione 4.2. Se $f'(c) \in \mathbb{R}$, la *retta tangente* a f in c è il grafico della funzione
$$x \mapsto f'(c)\cdot(x-c)+f(c),$$
ovvero l'insieme
$$\{(x,y)\colon x \in \mathbb{R} \wedge y = f'(c)\cdot(x-c)+f(c)\}.$$
Se $f'(c) = \pm\infty$, la *retta tangente* a f in c è l'insieme
$$\{(c,y)\colon x \in \mathbb{R}\}.$$



Definizione 4.3. Con la scrittura $f^{(n)}(c)$ indichiamo la *derivata n-esima* di f in c, ovvero:

$$\begin{aligned} f^{(0)}(c) &= f(c) \\ f^{(1)}(c) &= f'(c) \\ f^{(2)}(c) &= f''(c) \\ &\vdots \\ f^{(n+1)}(c) &= (f^{(n)})'(c). \end{aligned}$$

Esempio 4.4.

(i) Consideriamo la funzione costante $f = \hat{k}$ e $c \in \mathbb{R}$. Allora:

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

(ii) Consideriamo la funzione identità $f = \mathrm{id}$ e $c \in \mathbb{R}$. Allora:

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c+h-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

(iii) Sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Consideriamo la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \lambda \cdot x$ e $c \in \mathbb{R}$. Allora:

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\lambda \cdot (c+h) - \lambda \cdot c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\lambda \cdot h}{h} = \lambda.$$

(iv) Consideriamo la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ e $c \in \mathbb{R}$. Allora:

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(c+h)^2 - c^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c^2 + 2ch + h^2 - c^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2c+h) \\ &= 2c. \end{aligned}$$

(v) Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ e $c \in \mathbb{R}$. Allora:

$$\begin{aligned}
f'(c) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{c+h}-\frac{1}{c}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\left(\frac{1}{c+h} - \frac{1}{c} \right) \cdot \frac{1}{h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\left(\frac{c-(c+h)}{(c+h)c} \right) \cdot \frac{1}{h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\left(\frac{-h}{(c+h)c} \right) \cdot \frac{1}{h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{-1}{(c+h)c} \right) \\
&= -\frac{1}{c^2}
\end{aligned}$$

(vi) Consideriamo la funzione $f = \exp$. Allora:

$$f'(c) = \exp(c).$$

I dettagli sono lasciati per esercizio.

(vii) Consideriamo la funzione $f = \sin$. Allora:

$$f'(c) = \cos(c).$$

I dettagli sono lasciati per esercizio.

(viii) Consideriamo la funzione $f = \cos$. Allora:

$$f'(c) = -\sin(c).$$

I dettagli sono lasciati per esercizio.

(ix) Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ e $c \in \mathbb{R}$. Abbiamo:

- se $c > 0$, allora $f'(c) = 1$;
- se $c < 0$, allora $f'(c) = -1$;
- se $c = 0$, allora f non è differenziabile in c.

I dettagli sono lasciati per esercizio.

Proposizione 4.5. *Se $f\colon D \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $c \in D$, allora f è continua in c.*

Dimostrazione. Esercizio. ∎

Proposizione 4.6. *Siano $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ differenziabili in $c \in D$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora le funzioni $f+g, \lambda f, f \cdot g$ sono differenziabili in c. Inoltre:*

$$\begin{aligned}(f+g)'(c) &= f'(c) + g'(c),\\ (\lambda f)'(c) &= \lambda f'(c),\\ (f \cdot g)'(c) &= f'(c)\cdot g(c) + f(c)\cdot g'(c).\end{aligned}$$

Se $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in D$, allora anche la funzione $\frac{f}{g}$ è differenziabile in c e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)\cdot g(c) - f(c)\cdot g'(c)}{(g(c))^2}.$$

Dimostrazione. Esercizio. ∎

Esempio 4.7. Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Consideriamo la funzione

$$f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n$$

e $c \in \mathbb{R}$. Allora

$$f_n'(c) = n \cdot c^{n-1}.$$

Lo dimostriamo per induzione:

— Caso $n = 1$. In questo caso $f_1 = \mathrm{id}$, quindi

$$f_1'(c) = 1.$$

— Caso $n \to n+1$. Assumendo che

$$f_n'(c) = n \cdot c^{n-1},$$

l'obiettivo è dimostrare che

$$f_{n+1}'(c) = (n+1)\cdot c^n.$$

Osserviamo che

$$f_{n+1}(c) = c^{n+1} = c^n \cdot c = f_n(c)\cdot \mathrm{id}(c).$$

Dalla regola del prodotto segue che

$$\begin{aligned}f_{n+1}'(c) &= f_n'(c)\cdot \mathrm{id}(c) + f_n(c)\cdot \mathrm{id}'(c)\\ &= n\cdot c^{n-1}\cdot c + c^n \cdot 1\\ &= n\cdot c^n + c^n\\ &= (n+1)\cdot c^n.\end{aligned}$$

Proposizione 4.8. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$, sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ continua e strettamente crescente*[1] *o strettamente decrescente*[2]*, e sia $g\colon \operatorname{Im}(f) \to (a,b)$ tale che $g \circ f = \mathrm{id}$:*

$$\begin{tikzcd} (a,b) \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}"] & \operatorname{Im}(f) \arrow[r, "g"'] & (a,b). \end{tikzcd}$$

Se f è differenziabile in $c \in (a,b)$ e $f'(c) \neq 0$, allora g è differenziabile in $d = f(c)$, e

$$g'(d) = \frac{1}{f'(g(d))}.$$

Dimostrazione. Esercizio. ∎

Esempio 4.9. Consideriamo la funzione ln e $d \in (0, +\infty)$. Ricordiamo che $\ln \circ \exp = \mathrm{id}$. Allora:

$$\ln'(d) = \frac{1}{\exp'(\ln(d))} = \frac{1}{\exp(\ln(d))} = \frac{1}{d}.$$

Proposizione 4.10 (Regola della catena)**.** *Siano $f\colon D \to \mathbb{R}$ e $g\colon E \to \mathbb{R}$ tali che $\operatorname{Im}(f) \subseteq E$.*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & \operatorname{Im}(f) \subseteq E \arrow[r, "g"'] & \mathbb{R}. \end{tikzcd}$$

Se f è differenziabile in $c \in D$ e g è differenziabile in $f(c)$, allora $g \circ f$ è differenziabile in c, e

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c).$$

Dimostrazione. Esercizio. ∎

Esempio 4.11.

(i) Sia $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $\mathbb{R}$, e sia

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(3x+2).$$

Allora:

$$h'(c) = 3 \cdot g(3c+2).$$

[1] Per ogni $c, d \in (a,b)$ tali che $c < d$ si ha $f(c) < f(d)$.
[2] Per ogni $c, d \in (a,b)$ tali che $c < d$ si ha $f(c) > f(d)$.

(ii) Sia
$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (\sin(x))^2.$$
Allora:
$$h'(c) = 2\sin(c)\cos(c).$$

(iii) Sia
$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (\cos(x))^2.$$
Allora:
$$h'(c) = 2\cos(c)(-\sin(c)) = -2\sin(c)\cos(c).$$

(iv) Sia $a \in \mathbb{R}$, e sia
$$h\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^a.$$
Allora
$$h'(c) = a \cdot c^{a-1}.$$
I dettagli sono lasciati per esercizio.

Definizione 4.12. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e sia $c \in [a,b]$.

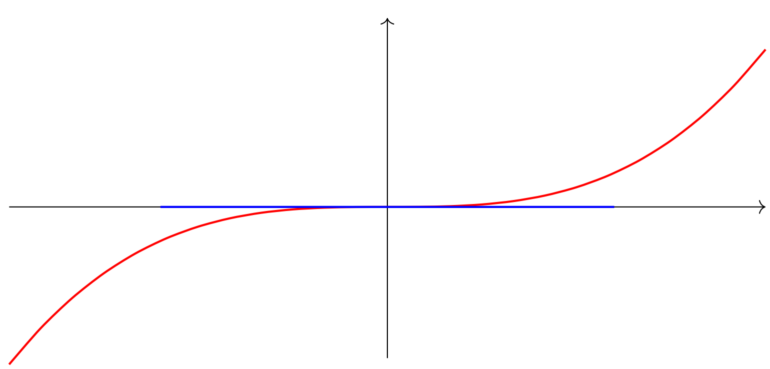
— c è *massimo locale* di f se esiste $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $x \in [a,b]$,
$$x \in B_c(\varepsilon) \to f(x) \leqslant f(c).$$

— c è *minimo locale* di f se esiste $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $x \in [a,b]$,
$$x \in B_c(\varepsilon) \to f(x) \geqslant f(c).$$

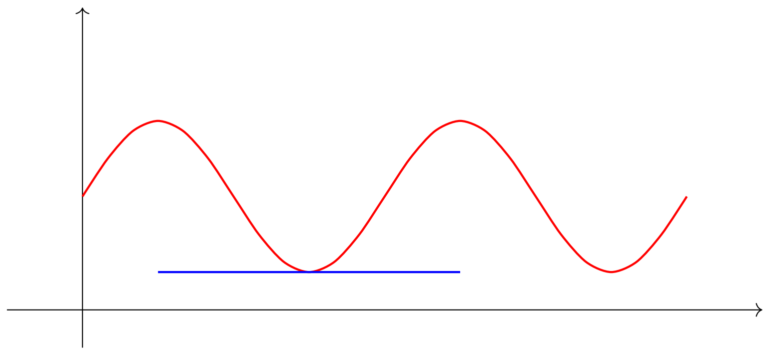
Proposizione 4.13. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e sia $c \in [a,b]$ un massimo locale o minimo locale tale che f sia differenziabile in c. Allora $f'(c) = 0$.*

Dimostrazione. Esercizio. ■

Osservazione 4.14. In generale non è vero che se $f'(c) = 0$ allora c è un massimo locale o minimo locale.

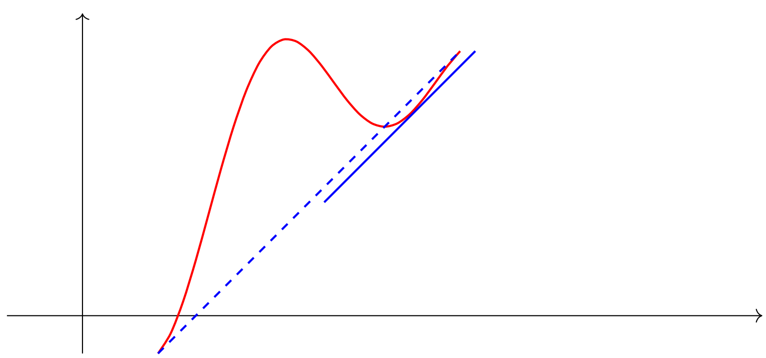


Teorema 4.15 (Teorema di Rolle)**.** *Sia* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$*, continua in* $[a,b]$*, tale che* $f(a) = f(b)$ *e differenziabile in* (a,b)*. Allora esiste* $c \in (a,b)$ *tale che* $f'(c) = 0$.



Teorema 4.16 (Teorema di Lagrange)**.** *Sia* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$*, continua in* $[a,b]$ *e differenziabile in* (a,b)*. Allora esiste* $c \in (a,b)$ *tale che*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Corollario 4.17. *Sia* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$*, continua in* $[a,b]$ *e differenziabile in* (a,b)*. Siano* $m, M \in \mathbb{R}$ *tali che, per ogni* $x \in (a,b)$*,*

$$m \leqslant f'(x) \leqslant M.$$

Allora, per ogni $c, d \in [a,b]$ *tali che* $c \leqslant d$ *abbiamo*

$$m \cdot (d - c) \leqslant f(d) - f(c) \leqslant M(d - c).$$

Dimostrazione. Esercizio. ■

Corollario 4.18. *Sia* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$*, continua in* $[a,b]$ *e differenziabile in* (a,b)*. Se* $f'(x) = 0$ *per ogni* $x \in (a,b)$*, allora* f *è costante.*

Dimostrazione. Esercizio. ■

Teorema 4.19 (Regola di de l'Hôpital)**.** *Siano* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue in* $[a,b]$ *e derivabili in* (a,b) *eccetto al più in* c*; sia* $g'(x) \neq 0$ *per* $x \neq c$*. Sia inoltre*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \quad \textit{oppure} \quad \lim_{x\to c} |f(x)| = \lim_{x\to c} |g(x)| = \infty,$$

ed esista

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

Allora

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Esercizi

Esercizio 1. Completare l'esempio 4.4.

Esercizio 2. Dimostrare che

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Esercizio 3. Dimostrare le Proposizioni 4.5, 4.6, 4.8, 4.10.

Esercizio 4. Completare l'esempio 4.11.

Esercizio 5. Dimostrare la Proposizione 4.13.

Esercizio 6. Dimostrare i Corollari 4.17 e 4.18.