Matematica e Statistica

Note del corso

Giulio Fellin

Introduzione

Queste note raccolgono e riorganizzano il materiale del corso di **Matematica e Statistica** tenuto per il Corso di Laurea in ISPIA presso l'Università di Verona (UniVR), negli anni accademici dal 2022/2023 al 2025/2026. Il testo nasce come supporto alle lezioni e come guida per uno studio progressivo: presenta definizioni, proprietà, procedimenti di calcolo ed esempi, con particolare attenzione agli strumenti matematici e statistici utili nelle scienze applicate.

Organizzazione del materiale

Il percorso è suddiviso in due parti principali, seguite da un'appendice. La **prima parte**, dedicata alla matematica, introduce il linguaggio logico e insiemistico, i numeri reali, le successioni, la completezza dei reali e le serie; passa poi allo studio delle funzioni elementari, dei limiti e della continuità, fino alle derivate e agli integrali. La **seconda parte**, dedicata alla statistica descrittiva e inferenziale, tratta gli indici di centralità e dispersione, la correlazione e la regressione, i fondamenti del calcolo delle probabilità e le principali distribuzioni continue; conclude con il teorema del limite centrale, gli intervalli di confidenza e i test di ipotesi. In **appendice** sono raccolte alcune tavole statistiche da consultare negli esercizi.

Gli esercizi sono raccolti in una sezione non numerata al termine di ciascun capitolo; alcuni esercizi statistici richiedono inoltre fogli di dati esterni, citati nelle tracce ma non inclusi in questa versione.

Gli argomenti sono organizzati per dipendenze concettuali: gli strumenti di analisi della prima parte vengono ripresi, in particolare, nello studio delle distribuzioni di probabilità e dell'inferenza statistica.

Prerequisiti

Si presuppone familiarità con l'aritmetica e l'algebra elementare: operazioni con numeri e frazioni, potenze e radicali, espressioni algebriche, equazioni e disequazioni di primo e secondo grado. Sono inoltre utili le nozioni di base sul piano cartesiano, sui grafici e sulle funzioni. Non è richiesta una conoscenza preliminare del calcolo differenziale e integrale né della statistica inferenziale, poiché i principali concetti vengono introdotti nel testo.

Indicazioni per lo studio

Si consiglia di affrontare i capitoli nell'ordine proposto, verificando la comprensione delle definizioni e ricostruendo autonomamente i passaggi degli esempi. Per un uso consapevole dei metodi statistici è importante prestare attenzione alle ipotesi richieste da ciascun risultato e alla corretta interpretazione delle conclusioni. Le tavole finali affiancano, ma non sostituiscono, tale verifica delle condizioni di applicabilità.

Indice

Introduzione **iii**

I Matematica 1

1 Linguaggio matematico **3**
1.1 Logica elementare . . . 3
1.2 Teoria intuitiva degli insiemi . . . 4
1.3 Funzioni . . . 7
Esercizi . . . 10

2 Numeri reali **15**
2.1 L'addizione . . . 15
2.1.1 La sottrazione . . . 16
2.1.2 La sommatoria . . . 16
2.2 La moltiplicazione . . . 16
2.2.1 La divisione . . . 17
2.2.2 La produttoria . . . 17
2.2.3 L'elevamento a potenza con esponente intero . . . 17
2.2.4 Il fattoriale . . . 18
2.3 La proprietà distributiva . . . 18
2.4 La relazione d'ordine . . . 19
2.4.1 L'assioma Archimedeo . . . 20
2.4.2 Maggioranti, minoranti, estremi . . . 20
2.4.3 Intervalli, funzioni costanti a tratti . . . 21
2.4.4 Il valore assoluto . . . 22
Esercizi . . . 23

3 Sequenze reali **25**
3.1 Limiti di sequenze . . . 27
3.2 Sequenze di Cauchy . . . 29
Esercizi . . . 31

4 Completezza dei reali, radici e potenze razionali **35**
4.1 L'assioma di completezza . . . 35
4.1.1 Le radici . . . 35
4.1.2 Numeri razionali . . . 37

4.1.3 L'elevamento a potenza con esponente razionale . . . 37
Esercizi . . . 39

5 Somme infinite **43**
5.1 Criteri di convergenza . . . 46
Esercizi . . . 48

6 Funzioni elementari **51**
6.1 Funzioni potenza . . . 53
6.1.1 Alcune funzioni ottenibili dalle funzioni potenza . . . 54
6.2 Funzioni esponenziali e logaritmiche . . . 55
6.2.1 La funzione esponenziale . . . 55
6.2.2 Il logaritmo naturale . . . 56
6.2.3 Esponenziali e logaritmi con base non naturale . . . 57
6.3 Funzioni trigonometriche e trigonometriche inverse . . . 58
6.3.1 Le funzioni trigonometriche . . . 58
6.3.2 Proprietà delle funzioni trigonometriche . . . 59
6.3.3 Le funzioni trigonometriche inverse . . . 63
Esercizi . . . 64

7 Continuità e limiti di funzioni **65**
7.1 Limiti notevoli . . . 69
Esercizi . . . 71

8 Derivate **75**
8.1 Monotonia . . . 80
8.2 Convessità e concavità . . . 82
8.3 Regola di de l'Hôpital . . . 83
Esercizi . . . 84

9 Integrali **89**
9.1 L'integrale di una funzione a scala . . . 89
9.2 L'integrale di Riemann . . . 90
9.3 Integrali e derivate . . . 92
Esercizi . . . 96

II Statistica descrittiva e inferenziale **99**

10 Indici di centralità, dispersione e regressione **101**
10.1 Frequenza e moda . . . 102
10.2 Mediana e quantili . . . 103
10.3 Media e varianza . . . 104
10.4 Correlazione e tecniche di interpolazione . . . 105
Esercizi . . . 108

11 Probabilità e distribuzioni continue **113**
11.1 Spazi di probabilità e variabili casuali . . . 113
11.2 Distribuzioni continue . . . 117
Esercizi . . . 121

12 Convergenza e approssimazione **123**
12.1 Teorema del limite centrale . . . 123
12.2 Test di ipotesi . . . 125
12.2.1 Test Z . . . 125
12.2.2 Test t di Student . . . 126

12.2.3 Test F di Fisher 128
12.2.4 Test χ^2 128
Esercizi 130

III Appendice **133**

A Tavole dei valori di soglia per i test statistici **135**

Parte I

Matematica

1 Linguaggio matematico

1.1 Logica elementare

Una **formula** A è un'espressione matematica. Le formule possono avere due valori di verità: 0 (**falso**, F) o 1 (**vero**, V).

Siano A, B formule.

— La formula **falso** $\bot$ non è mai vera.

— La formula **vero** $\top$ è sempre vera.

— La **congiunzione** $A \wedge B$ (si legge 'A e B') è vera se A e B sono entrambe vere.

— La **disgiunzione** $A \vee B$ (si legge 'A o B') è vera se A è vera o se B è vera.

— L'**implicazione** $A \to B$ (si legge 'A implica B') è vera se, ogni volta che supponiamo che A sia vera allora otteniamo che B è vera.

— La **negazione** $\neg A$ (si legge 'non A') è vera se A è falsa.

Abbiamo inoltre la seguente abbreviazione:

— L'**equivalenza** $A \leftrightarrow B$ (si legge 'A se e solo se B') è definita come l'abbreviazione di

$$(A \to B) \wedge (B \to A).$$

Possiamo riassumere la situazione nella seguente **tabella di verità**:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$B \to A$	$\neg A$	$\neg B$	$A \leftrightarrow B$
V	V	V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V	F	V	F
F	V	F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	V	V	V	V

Le formule possono contenere delle variabili $a, b, c, ..., x, y, z, a_1, a_2, a_3, ...$ Scriviamo $A(x)$ per indicare che la formula A contiene la variabile x.

Sia $A(x)$ una formula.

— La **formula esistenziale** $\exists x(A(x))$ è vera se esiste un oggetto a tale che $A(a)$ è vera.

— La **formula universale** $\forall x(A(x))$ è vera se per ogni oggetto a si ha che $A(a)$ è vera.

Proprietà Siano A, B, C formule. Allora le seguenti formule sono vere:

1. **principio di identità**:
$$A \to A,$$
2. **principio di esplosione**:
$$\bot \to A,$$
3. **proprietà idempotente della congiunzione/disgiunzione**:
$$A \wedge A \leftrightarrow A \quad \text{e} \quad A \vee A \leftrightarrow A,$$
4. **proprietà commutativa della congiunzione/disgiunzione**:
$$A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A \quad \text{e} \quad A \vee B \leftrightarrow B \vee A,$$
5. **proprietà associativa della congiunzione/disgiunzione**:
$$(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C) \quad \text{e} \quad (A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C),$$
6. **proprietà assorbente della congiunzione/disgiunzione**:
$$(A \vee B) \wedge A \leftrightarrow A \quad \text{e} \quad (A \wedge B) \vee A \leftrightarrow A,$$
7. **proprietà distributiva della congiunzione rispetto alla disgiunzione e viceversa**:
$$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad \text{e} \quad A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C),$$
8. **negazione del vero** e **negazione del falso**:
$$\neg\top \leftrightarrow \bot \quad \text{e} \quad \neg\bot \leftrightarrow \top,$$
9. **principio di non contraddizione**:
$$\neg(A \wedge \neg A),$$
10. **principio del terzo escluso**:
$$A \vee \neg A,$$
11. **eliminazione della doppia negazione**:
$$\neg\neg A \leftrightarrow A,$$
12. **leggi di De Morgan per congiunzione e disgiunzione**:
$$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B \quad \text{e} \quad \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B.$$

1.2 Teoria intuitiva degli insiemi

— Un **insieme** S è una collezione di oggetti matematici.

— Gli oggetti che appartengono a S si chiamano **elementi** di S. Scriviamo $x \in S$ per "x è un elemento di S". La scrittura $x \notin A$ è un'abbreviazione per $\neg(x \in A)$.

Spesso usiamo i simboli $\{\}$ per denotare gli elementi di un insieme. Ad esempio, l'insieme composto dagli elementi a, b, c e d è
$$\{a, b, c, d\}.$$

— L'insieme che non ha elementi si chiama **insieme vuoto**, e si indica con $\emptyset$.

— Due insiemi S e T si dicono **uguali**, in simboli $S = T$, se hanno gli stessi elementi, ovvero:

$$\forall x(x \in S \leftrightarrow x \in T).$$

Due insiemi S e T si dicono **diversi**, in simboli $S \neq T$, se non sono uguali, i.e. se $\neg(S = T)$.

— S è un **sottoinsieme** di T, in simboli $S \subseteq T$, se ogni elemento di S è anche un elemento di T, ovvero:

$$\forall x(x \in S \rightarrow x \in T).$$

S è un **sottoinsieme proprio** di T, in simboli $S \subsetneq T$, se

$$S \subseteq T \wedge S \neq T.$$

Se S è un insieme, possiamo definire il suo sottoinsieme S_A attraverso una proprietà $A(x)$:

$$S_A = \{x \in S : A(x)\}.$$

Spesso usiamo le abbreviazioni

— $\forall x \in S(A(x))$ per $\forall x(x \in S \rightarrow A(x))$,

— $\exists x \in S(A(x))$ per $\exists x(x \in S \wedge A(x))$.

Esempi

— L'insieme dei **numeri naturali**:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}.$$

— L'insieme dei **numeri pari**:

$$\text{Par} = \{n \in \mathbb{N} : \exists x \in \mathbb{N}(2x = n)\}.$$

— L'insieme dei **numeri dispari**:

$$\text{Dis} = \{n \in \mathbb{N} : \exists x \in \mathbb{N}(2x + 1 = n)\}.$$

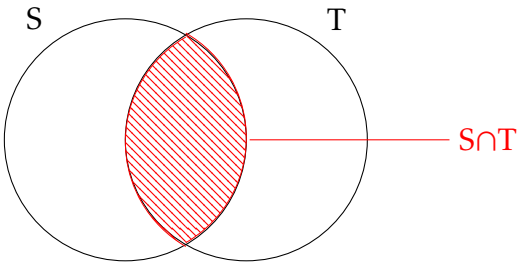
Osservazione Due insiemi sono uguali se e solo se sono uno sottoinsieme dell'altro e viceversa:

$$S = T \leftrightarrow (S \subseteq T \wedge T \subseteq S).$$

Operazioni insiemistiche Siano S e T degli insiemi.

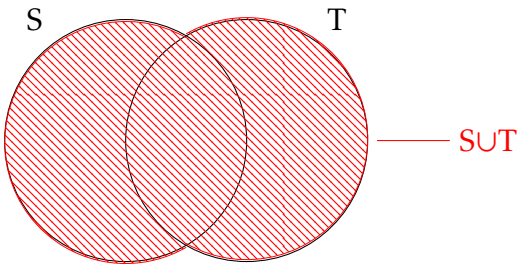
— L'**intersezione** di S e T è l'insieme degli elementi che stanno sia in S che in T:

$$S \cap T = \{x : x \in S \wedge x \in T\}.$$



— L'**unione** di S e T è l'insieme degli elementi che stanno in S più tutti gli elementi che stanno in T:

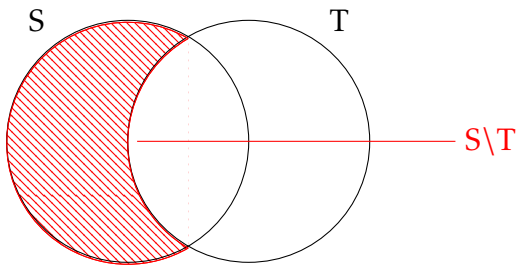
$$S \cup T = \{x : x \in S \vee x \in T\}.$$



— Il **complemento** di T in S (oppure 'S senza T') è l'insieme degli elementi che stanno in S ma non in T:

$$S \setminus T = \{x \in S : x \notin T\}.$$

Se S è fissato, possiamo utilizzare l'abbreviazione T' al posto di $S \setminus T$.



— Il **prodotto cartesiano** di S e T è l'insieme delle **coppie ordinate** (a, b) dove $a \in S$ e $b \in T$:

$$S \times T = \{(a, b) : a \in S \wedge b \in T\}.$$

— L'**insieme potenza** (o **insieme delle parti**) di S è la collezione dei sottoinsiemi di S:

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(S) &= \{U : U \subseteq S\} \\ &= \{U : \forall x \in U (x \in S)\}.\end{aligned}$$

Esempi È facile notare che:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Par} \cap \mathrm{Dis} = \emptyset, && \mathbb{N} \setminus \mathrm{Par} = \mathrm{Dis}, \\ &\mathrm{Par} \cup \mathrm{Dis} = \mathbb{N}, && \mathbb{N} \setminus \mathrm{Dis} = \mathrm{Par}.\end{aligned}$$

Proprietà Sia X un insieme, e siano S, T, U sottoinsiemi di X. Allora:

1. $\emptyset \subseteq X$ e $X \subseteq X$,
2. **proprietà idempotente dell'intersezione/unione**:
$$S \cap S = S \quad \text{e} \quad S \cup S = S,$$
3. **proprietà commutativa dell'intersezione/unione**:
$$S \cap T = T \cap S \quad \text{e} \quad S \cup T = T \cup S,$$
4. **proprietà associativa dell'intersezione/unione**:
$$(S \cap T) \cap U = S \cap (T \cap U) \quad \text{e} \quad (S \cup T) \cup U = S \cup (T \cup U),$$

5. **proprietà assorbente dell'intersezione/unione**:

$$(S \cup T) \cap S = S \quad \text{e} \quad (S \cap T) \cup S = S,$$

6. **caratterizzazione di sottoinsieme in termini di intersezione/unione**:

$$S \subseteq T \leftrightarrow S \cap T = S \quad \text{e} \quad S \subseteq T \leftrightarrow S \cup T = T,$$

7. **proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione e viceversa**:

$$S \cap (T \cup U) = (S \cap T) \cup (S \cap U) \quad \text{e} \quad S \cup (T \cap U) = (S \cup T) \cap (S \cup U),$$

8. **complemento dell'insieme universale** e **complemento dell'insieme vuoto**:

$$X' = \emptyset \quad \text{e} \quad \emptyset' = X,$$

9. **intersezione/unione con il complementare**:

$$S \cap S' = \emptyset \quad \text{e} \quad S \cup S' = X,$$

10. **eliminazione del doppio complemento**:

$$S'' = S,$$

11. **leggi di De Morgan per intersezione ed unione**:

$$(S \cap T)' = S' \cup T' \quad \text{e} \quad (S \cup T)' = S' \cap T',$$

12. **legge di De Morgan per i sottoinsiemi**:

$$S \subseteq T \leftrightarrow T' \subseteq S'.$$

1.3 Funzioni

Funzioni Se S e T sono insiemi, una **funzione** $f\colon S \to T$ è una regola che associa ad ogni elemento $x \in S$ un unico elemento $f(x) \in T$, detto il **valore** di f in x. Scriviamo anche:

$$x \mapsto f(x).$$

Gli insiemi S e T sono chiamati rispettivamente il **dominio** e il **codominio** di f. Scriviamo:

$$\mathrm{Dom}\, f = S \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Cod}\, f = T.$$

L'**insieme immagine** di f è definito come segue:

$$\mathrm{Im}\, f = \{f(a)\colon a \in \mathrm{Dom}\, f\}.$$

Due funzioni f e g sono **uguali**, in simboli $f = g$, se

$$\mathrm{Dom}\, f = \mathrm{Dom}\, g \qquad \text{e} \qquad \forall x \in \mathrm{Dom}\, f\,(f(x) = g(x)).$$

Osservazione $\mathrm{Im}\, f \subseteq \mathrm{Cod}\, f$.

Esempi Si consideri $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto 2n$. Allora:

$$\begin{aligned} &f(0) = 0, \\ &f(1) = 2, \\ &f(3) = 6, \\ &f(4) = 8, \\ &\vdots \\ &f(50) = 100, \\ &\vdots \end{aligned} \qquad \operatorname{Im} f = \mathrm{Par}.$$

Funzioni iniettive, suriettive, biiettive Una funzione f è detta:

— **iniezione** (o **funzione iniettiva**) se, per ogni $x, y \in \operatorname{Dom} f$,

$$f(x) = f(y) \to x = y;$$

— **suriezione** (o **funzione suriettiva**) se

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Cod} f;$$

— **biiezione** (o **funzione biiettiva**) se è sia un'iniezione che una suriezione.

Esempi

— La funzione

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto 2n$$

è iniettiva ma non suriettiva.

— La funzione

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \frac{n-1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

è suriettiva ma non iniettiva.

— La funzione

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n$$

è biiettiva.

Funzione identità, funzione costante Siano S, T insiemi.

— La **funzione identità** di S è

$$\mathrm{id}_S : S \to S, x \mapsto x.$$

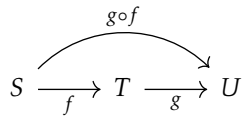
— Fissato $c \in T$, la **funzione costante** $\hat{c}$ è definita come

$$\hat{c} : S \to T, x \mapsto c.$$

Composizione di funzioni Siano S, T, U insiemi. Si considerino le funzioni $f : S \to T$ e $g : T \to U$. La **composizione** di f e g è la funzione

$$g \circ f : S \to U, x \mapsto g(f(x)).$$

Possiamo rappresentarla con il diagramma:



Nota bene! La composizione **NON** è commutativa. Ad esempio, si considerino

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto x+1,$$
$$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto x^2.$$

Si ottengono le composizioni:

$$g \circ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto (x+1)^2,$$
$$f \circ g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto x^2+1.$$

Proprietà Si considerino gli insiemi A, B, C, D e le funzioni f, g, h secondo il seguente diagramma:

$$A \xrightarrow[f]{} B \xrightarrow[g]{} C \xrightarrow[h]{} D$$

Allora:

1. l'identità è **elemento neutro della composizione**:

$$f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f,$$

2. **proprietà associativa della composizione**:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Esercizi

Logica elementare

Esercizio 1.1. Scrivere la tabella di verità delle formule:

1. $A \wedge (\neg B)$.
2. $A \vee (\neg B)$.
3. $A \Rightarrow (\neg A)$.
4. $(\neg A) \Leftrightarrow (\neg B)$.
5. $\neg(A \Leftrightarrow B)$.
6. $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$.
7. $A \Rightarrow A$.
8. $\bot \Rightarrow A$.
9. $A \Rightarrow \bot$.
10. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.
11. $((A \wedge B) \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow C)$.
12. $(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow (A \wedge B)$.
13. $A \wedge A \Leftrightarrow A$,
    $A \vee A \Leftrightarrow A$.
14. $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$,
    $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$.
15. $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$,
    $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$.
16. $A \wedge B \Rightarrow A \vee B$,
    $A \vee B \Rightarrow A \wedge B$.
17. $(A \vee B) \wedge A \Leftrightarrow A$,
    $(A \wedge B) \vee A \Leftrightarrow A$.
18. $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,
    $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
19. $\neg\top \Leftrightarrow \bot$,
    $\neg\bot \Leftrightarrow \top$.
20. $A \wedge \neg A \Leftrightarrow \bot$,
    $A \vee \neg A \Leftrightarrow \top$.
21. $\neg(A \wedge \neg A)$.
22. $A \vee \neg A$.
23. $(A \vee B) \wedge \neg A \Rightarrow B$.
24. $\neg\neg A \Leftrightarrow A$.
25. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$,
    $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$.
26. $A \oplus B$, definito come $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$.
27. $\neg(A \wedge B)$.
28. $\neg(A \vee B)$.
29. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.
30. $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.
31. $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \Leftrightarrow A$.
32. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$.
33. $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \Rightarrow (B \vee C)$.
34. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

Esercizio 1.2. Definito $A|B$ come $\neg(A \wedge B)$, dimostrare che

1. $\neg A \Leftrightarrow A|A$,
2. $A \wedge B \Leftrightarrow (A|B)|(A|B)$,
3. $A \vee B \Leftrightarrow (A|A)|(B|B)$,
4. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((A|A)|(A|A))|(B|B)$.

Teoria intuitiva degli insiemi

Esercizio 1.3. Tra le seguenti coppie di insiemi, dire in che caso siamo tra $A \subsetneq B$, $B \subsetneq A$, $A = B$, $A \cap B = \emptyset$, nessuna delle precedenti.

1. $A = \mathbb{N}$ e $B = \mathbb{Z}$.
2. $A = \mathbb{N}$ e $B = \mathrm{Par}$.
3. $A = \mathrm{Dis}$ e $B = \mathrm{Par}$.
4. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \mathbb{N}$.
5. $A = \emptyset$ e $B = \mathbb{N}$.
6. $A = \{x \in \mathbb{N} \colon x > 3\}$ e $B = \mathbb{N}$.
7. $A = \{x \in \mathbb{Z} \colon x > 0\}$ e $B = \mathbb{N}$.
8. $A = \{x \in \mathbb{R} \colon x^2 < 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \colon |x| < 1\}$.

9. $A = \{2n \colon n \in \mathbb{Z}\}$ e $B = \{n \in \mathbb{Z} \colon n \text{ è pari}\}$.
10. $A = \{x \in \mathbb{N} \colon x \text{ è multiplo di } 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \colon x \text{ è multiplo di } 6\}$.
11. $A = \{x \in \mathbb{N} \colon x \leq 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Esercizio 1.4. Vero o falso?

1. $\{a, b, c, d\} = \{d, b, a, c\}$.
2. $\{a, b, c, d\} = \{a, b, c, d, d, d\}$.
3. $\{a, b, c, d\} = \{a, b, c\}$.
4. $\emptyset = \{\emptyset\}$.
5. $\{a, \{b\}\} = \{\{b\}, a\}$.
6. $\{a, \{b\}\} = \{a, b\}$.
7. $\{\emptyset\} = \{\{\emptyset\}\}$.
8. $\{0\} = \emptyset$.
9. $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
10. $\mathscr{P}(\{0\}) = \{\emptyset, \{0\}\}$.

Esercizio 1.5. Vero o falso?

1. Dato un insieme X, l'insieme $X \cup \{0\}$ ha sempre più elementi di X.
2. Dati due insiemi X e Y, allora $|X \cup Y| = |X| + |Y|$.
3. Dati due insiemi X e Y, allora $X \times Y$ ha sempre più elementi di X.
4. Dato un insieme X, se $0 \in X$, allora $X \cup \{0\} = X$.
5. Se X e Y sono insiemi disgiunti, allora $|X \cup Y| = |X| + |Y|$.
6. Se $Y \subseteq X$, allora $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.
7. Se $X = \emptyset$, allora $X \times Y = \emptyset$ per ogni Y.
8. Se X ha n elementi, allora $\mathscr{P}(X)$ ne ha n^2.

Esercizio 1.6. Si risponda alle seguenti domande.

1. Se l'insieme X ha 5 elementi, quanti elementi ha l'insieme $X \times X$?
2. L'insieme A ha 4 elementi e l'insieme B ha 1 elemento. Quanti elementi ha l'insieme $A \times \mathscr{P}(B)$? E l'insieme $A \times \emptyset$?
3. Se $X = \{a, b\}$ e $Y = \{1, 2, 3\}$, elencare tutti gli elementi di $X \times Y$.
4. Se $A = \{0, 1\}$, descrivere per esteso $\mathscr{P}(A \times A)$.
5. Se A ha n elementi, quanti ne ha $\mathscr{P}(A \times A)$?
6. Calcolare $|\mathscr{P}(A \times B)|$ sapendo che $|A| = 2$ e $|B| = 3$.

Esercizio 1.7. Siano $X = \{\emptyset\}$ e $Y = \emptyset$.

1. Scrivere per esteso l'insieme $\mathscr{P}(X)$.
2. Scrivere per esteso l'insieme $X \cup Y$.
3. Scrivere per esteso l'insieme $X \cap Y$.
4. Scrivere per esteso l'insieme $X \times \mathscr{P}(Y)$.
5. Scrivere per esteso l'insieme $\mathscr{P}(\mathscr{P}(Y))$.
6. Calcolare $|\mathscr{P}(X)|$ e $|\mathscr{P}(Y)|$.
7. Verificare se $Y \in X$ e se $X \in \mathscr{P}(Y)$.

Esercizio 1.8. Si considerino:

$$A = \{0, 1, 2\},$$
$$B = \{0, 1, 2, 3\},$$
$$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

1. Scrivere per esteso gli insiemi $A \times B$ e $B \times A$.
2. Elencare tutti i sottoinsiemi di A.
3. Elencare tutti gli elementi di $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.
4. Quanti elementi ha l'insieme $\mathscr{P}(C)$?

5. Calcolare $(A \cup B) \setminus A$ e $(A \cap C) \setminus B$.
6. Determinare se $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ e $A \subseteq C$.
7. Trovare B' e C' rispetto all'universo $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.
8. Scrivere l'insieme $(A \cup B)' \cup C'$ rispetto a U.

Esercizio 1.9. Sia X un insieme, e siano A, B, C sottoinsiemi di X. Dimostrare che:

1. $\emptyset \subseteq X$,
   $X \subseteq X$.
2. $A \cap A = A$,
   $A \cup A = A$.
3. $A \cap B = B \cap A$,
   $A \cup B = B \cup A$.
4. $X' = \emptyset$,
   $\emptyset' = X$.
5. $A \cap A' = \emptyset$,
   $A \cup A' = X$.
6. $A'' = A$.
7. $A \setminus B = A \cap B'$.

Per approfondire

Esercizio 1.10. Sia X un insieme, e siano A, B, C sottoinsiemi di X. Dimostrare che:

1. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
2. $(A \cap B) \cup A = A$,
   $(A \cup B) \cap A = A$.
3. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$,
   $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
5. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
6. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
7. $(A \cap B)' = A' \cup B'$,
   $(A \cup B)' = A' \cap B'$.
8. $A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$.
9. $A \setminus B = A \cap B'$.
10. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
11. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
12. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
13. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Esercizio 1.11. Si definisca la differenza simmetrica di A e B come segue:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Dimostrare che:

1. $A \triangle \emptyset = A$ e $A \triangle A = \emptyset$.
2. $A \triangle B = B \triangle A$.
3. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
4. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

Funzioni

Esercizio 1.12. Dire se le seguenti funzioni sono iniettive, suriettive, biiettive:

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto 3x$.
2. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{se } x \text{ è pari,} \\ x-1 & \text{se } x \text{ è dispari.} \end{cases}$
3. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto 0$.
4. $f : \mathbb{N} \to \{0\}, x \mapsto 0$.
5. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{se } x \text{ è pari,} \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{se } x \text{ è dispari.} \end{cases}$
6. $f : \{0\} \to \mathbb{N}, x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{se } x \text{ è pari,} \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{se } x \text{ è dispari.} \end{cases}$
7. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto x^2 - 1$.

8. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto x^3 - 1$.
9. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto \lfloor x/2 \rfloor$.
10. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto 2x + 1$.
11. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto x + 1$.
12. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ x - 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$
13. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ x & \text{altrimenti.} \end{cases}$
14. $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ è pari,} \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$
15. $f : \{0,1\} \to \{0,1\}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ è pari,} \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$
16. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto \begin{cases} x & \text{se } x \text{ è pari,} \\ 2x & \text{se } x \text{ è dispari.} \end{cases}$

Esercizio 1.13. Trovare un esempio di una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che sia

1. biiettiva ma non identica.
2. suriettiva e iniettiva.
3. iniettiva ma non suriettiva.
4. suriettiva ma non iniettiva.
5. né iniettiva né suriettiva.
6. né iniettiva né suriettiva né costante.

Esercizio 1.14. Trovare un esempio di un insieme X nei seguenti casi:

1. la funzione $f : \mathbb{N} \to X,\ x \mapsto 2x$ sia suriettiva.
2. la funzione $f : X \to \mathbb{N},\ x \mapsto 2x$ sia iniettiva.
3. la funzione $f : X \to X,\ x \mapsto x^2$ sia biiettiva.
4. la funzione $f : \mathbb{Z} \to X, x \mapsto x^2$ sia suriettiva.
5. la funzione $f : X \to \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$ sia iniettiva.

2 Numeri reali

L'insieme $\mathbb{R}$ dei **numeri reali** è caratterizzato, a meno di isomorfismo, dalle seguenti proprietà:

1. le proprietà dell'addizione,
2. le proprietà della moltiplicazione,
3. la proprietà distributiva della moltiplicazione sull'addizione,
4. le proprietà dell'ordine (incluso l'assioma Archimedeo),
5. l'assioma di completezza, che formuleremo dopo aver introdotto le successioni e il criterio di Cauchy.

2.1 L'addizione

L'insieme $\mathbb{R}$ è provvisto di una funzione binaria

$$+\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, (a,b)\mapsto a+b \qquad \text{(addizione)}$$

che soddisfa

1. **Proprietà associativa**:
$$\forall x\forall y\forall z \quad ((x+y)+z = x+(y+z)).$$
2. **Esistenza dell'elemento neutro**:
$$\exists y\forall x \quad (y+x=x).$$
Tale **elemento neutro** è indicato con 0.
3. **Esistenza degli elementi inversi**:
$$\forall x\exists y \quad (x+y=0).$$
Dato x, il suo **elemento inverso rispetto all'addizione** è indicato con $-x$, ed è anche detto **opposto** di x.
4. **Proprietà commutativa**:
$$\forall x\forall y \quad (x+y=y+x).$$

Osservazioni

— L'elemento neutro 0 è univocamente determinato.

— Dato $x\in\mathbb{R}$, il suo elemento inverso $-x$ è univocamente determinato.

2.1.1 La sottrazione

La **sottrazione** è la funzione

$$-\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, (x,y)\mapsto x+(-y).$$

2.1.2 La sommatoria

Data una sequenza $x_0,...,x_n\in\mathbb{R}$, scriviamo

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = x_0+...+x_n.$$

Più in generale:

$$\sum_{i=a}^{b} x_i = x_a+...+x_b,$$

dove $0\leqslant a\leqslant b\leqslant n$.

2.2 La moltiplicazione

L'insieme $\mathbb{R}$ dei **numeri reali** è provvisto di una funzione binaria

$$\cdot\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, (a,b)\mapsto a\cdot b \qquad \text{(moltiplicazione)}$$

che soddisfa

1. **Proprietà associativa**:
$$\forall x\forall y\forall z \quad ((x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)).$$

2. **Esistenza dell'elemento neutro**:
$$\exists y\forall x \quad (y\cdot x = x).$$
Tale **elemento neutro** è indicato con 1.

3. **Esistenza degli elementi inversi**:
$$\forall x \quad (x=0\vee\exists y(x\cdot y=1)).$$
Dato x, il suo **elemento inverso (rispetto alla moltiplicazione)** (detto anche **reciproco**) è indicato con $1/x$, o $\frac{1}{x}$, o x^{-1}.

4. **Proprietà commutativa**:
$$\forall x\forall y \quad (x\cdot y = y\cdot x).$$

Osservazioni

— L'elemento neutro 1 è univocamente determinato.

— Dato $x\in\mathbb{R}$, il suo elemento inverso $\frac{1}{x}$ è univocamente determinato.

Osservazione Dato $n\in\mathbb{N}$, identifichiamo

$$n = \underbrace{1+...+1}_{n \text{ volte}}.$$

In questo modo, $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{R}$.

2.2.1 La divisione

La **divisione** è la funzione

$$/ \colon \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x \cdot \frac{1}{y}.$$

Scriviamo anche $\frac{x}{y}$ per indicare x/y.

2.2.2 La produttoria

Data una sequenza $x_0, ..., x_n \in \mathbb{R}$, scriviamo

$$\prod_{i=0}^{n} x_i = x_0 \cdot ... \cdot x_n.$$

Più in generale:

$$\prod_{i=a}^{b} x_i = x_a \cdot ... \cdot x_b,$$

dove $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$.

2.2.3 L'elevamento a potenza con esponente intero

Sia $a \in \mathbb{R}$, e sia $n \in \mathbb{N}$. L'n-esima potenza di a è definita come

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ a^{n-1} \cdot a & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Inoltre, se $a \neq 0$, definiamo

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

Osservazione Se $n > 0$, possiamo scrivere

$$a^n = \prod_{i=1}^{n} a.$$

Le proprietà delle potenze Consideriamo i casi:[1]

— $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $m, n \in \mathbb{Z}$, oppure

— $a, b \in \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{N}$.

Allora:

1. **Proprietà della somma degli esponenti** (o **della moltiplicazione di potenze con la stessa base**)
$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n,$$
2. **Proprietà della potenza di una potenza**:
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n},$$
3. **Proprietà della potenza del prodotto**:
$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n.$$

[1] Diciamo "nei casi in cui le espressioni **hanno significato**".

2.2.4 Il fattoriale

Sia $n \in \mathbb{N}$. Il **fattoriale** di n è definito come

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ n \cdot (n-1)! & \text{se } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Osservazione Se $n > 0$, possiamo scrivere

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i.$$

2.3 La proprietà distributiva

$$\forall x \forall y \forall z \quad (x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)).$$

Alcune conseguenze

1. **Proprietà di annullamento del prodotto per zero** (si dice anche che zero è **elemento assorbente** della moltiplicazione):
$$\forall x \quad (0 \cdot x = 0),$$
2. **Proprietà distributiva del segno rispetto alla moltiplicazione** (o **proprietà del segno nel prodotto**):
$$\forall x \forall y \quad ((-x) \cdot y = -(x \cdot y)),$$
3. **Proprietà del prodotto di numeri negativi**:
$$\forall x \forall y \quad ((-x) \cdot (-y) = x \cdot y),$$
4. **Proprietà distributiva del segno rispetto alla somma**:
$$\forall x \forall y \quad (-(x + y) = -x - y),$$
5. **Proprietà del prodotto nullo** (o **principio di annullamento del prodotto**):
$$\forall x \forall y \quad (x \cdot y = 0 \to x = 0 \vee y = 0).$$
6. **Proprietà del reciproco del prodotto**:
$$\forall x \forall y \quad \left(x \neq 0 \wedge y \neq 0 \to \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x \cdot y}\right),$$
$$\forall w \forall x \forall y \forall z \quad \left(x \neq 0 \wedge y \neq 0 \to \frac{w}{x} \cdot \frac{z}{y} = \frac{w \cdot z}{x \cdot y}\right),$$
7. **Proprietà del prodotto di frazioni**:
$$\forall w \forall x \forall y \forall z \quad \left(x \neq 0 \wedge y \neq 0 \to \frac{w}{x} + \frac{z}{y} = \frac{w \cdot y + z \cdot x}{x \cdot y}\right),$$
8. **Proprietà di cancellazione del prodotto**:
$$\forall x \forall y \forall z \quad (x \neq 0 \wedge x \cdot y = x \cdot z \to y = z).$$

2.4 La relazione d'ordine

L'insieme $\mathbb{R}$ dei **numeri reali** è provvisto di una relazione binaria $<$ (l'espressione $x < y$ è da leggersi "x è **minore** di y") che soddisfa

1. **Tricotomia** (detta anche **linearità** o **totalità**):
$$\forall x \forall y \quad (x < y \vee x = y \vee y < x).$$
2. **Proprietà transitiva**:
$$\forall x \forall y \forall z \quad ((x < y \wedge y < z) \to x < z).$$
3. **Compatibilità con l'addizione**:
$$\forall x \forall y \forall z \quad (x < y \to x + z < y + z).$$
4. **Compatibilità con la moltiplicazione (per un numero positivo)**:
$$\forall x \forall y \forall z \quad ((x < y \wedge 0 < z) \to x \cdot z < y \cdot z).$$

Alcune abbreviazioni Utilizziamo le seguenti abbreviazioni:

$x > y$	per	$y < x$,
$x \leqslant y$	per	$x < y \vee x = y$,
$x \geqslant y$	per	$x > y \vee x = y$.

Alcune conseguenze

1. $0 < 1$,
2. **Positività dei numeri naturali**:
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (n > 0),$$
3. **Proprietà del prodotto di numeri negativi**:
$$\forall x \forall y \quad (x < 0 \wedge y < 0 \to x \cdot y > 0),$$
4. **Proprietà del prodotto di numeri di segno opposto**:
$$\forall x \forall y \quad (x > 0 \wedge y < 0 \to x \cdot y < 0),$$
5. **Positività del quadrato**:
$$\forall x \quad (x \neq 0 \to x^2 > 0),$$
6. **Proprietà del reciproco di un numero positivo**:
$$\forall x \quad \left(x > 0 \to \frac{1}{x} > 0\right),$$
7. **Compatibilità con la moltiplicazione per un numero negativo**:
$$\forall x \forall y \forall z \quad ((x < y \wedge z < 0) \to x \cdot z > y \cdot z),$$
8. **Proprietà della reciprocità inversa**:
$$\forall x \forall y \quad \left(x < y \wedge x > 0 \to \frac{1}{y} < \frac{1}{x}\right),$$

2.4.1 L'assioma Archimedeo

Un'importante proprietà dei numeri reali è l'**assioma di Archimede** (o **assioma Archimedeo**):[2]

$$\forall x \forall M \quad (x > 0 \wedge M > 0) \to \exists n \in \mathbb{N}(n \cdot x > M).$$

Una sua variante è la seguente:

$$\forall x \forall \varepsilon \quad (x > 0 \wedge \varepsilon > 0) \to \exists n \in \mathbb{N}\left(\frac{x}{n} < \varepsilon\right).$$

Alcune conseguenze

— Per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$-n < x < n.$$

— Per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste uno ed un unico $k \in \mathbb{Z}$ tale che

$$k \leqslant x < k + 1.$$

— Per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste uno ed un unico $k \in \mathbb{Z}$ tale che

$$k < x \leqslant k + 1.$$

2.4.2 Maggioranti, minoranti, estremi

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.

— L'insieme dei **maggioranti** di A è: $\uparrow A = \{x \in \mathbb{R} \colon \forall a \in A(x \geqslant a)\}$.

— L'insieme dei **minoranti** di A è: $\downarrow A = \{x \in \mathbb{R} \colon \forall a \in A(x \leqslant a)\}$.

— L'**estremo superiore** di A è l'elemento $\sup A$ tale che

$$\forall a \in A(\sup A \geqslant a) \qquad \text{e} \qquad \forall x \in \uparrow A(\sup A \leqslant x).$$

Se $\sup A \in A$, allora è detto **massimo**, e si scrive $\max A$.

— L'**estremo inferiore** di A è l'elemento $\inf A$ tale che

$$\forall a \in A(\inf A \leqslant a) \qquad \text{e} \qquad \forall x \in \downarrow A(\inf A \geqslant x).$$

Se $\inf A \in A$, allora è detto **minimo**, e si scrive $\min A$.

Osservazioni

— Non sempre l'estremo superiore di A esiste. Se esiste, allora è univocamente determinato.

— Non sempre l'estremo inferiore di A esiste. Se esiste, allora è univocamente determinato.

— Se A è finito e non vuoto, allora possiede massimo e minimo.

[2] I simboli M ed ε sono spesso utilizzati per rappresentare, rispettivamente, un valore "grande quanto vogliamo" e "piccolo quanto vogliamo".

2.4.3 Intervalli, funzioni costanti a tratti

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a \leqslant b$, definiamo

— l'**intervallo aperto** con estremi a e b

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\},$$

— l'**intervallo chiuso** con estremi a e b

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leqslant x \leqslant b\},$$

— l'**intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra** con estremi a e b

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x \leqslant b\},$$

— l'**intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra** con estremi a e b

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leqslant x < b\},$$

— l'**intervallo aperto illimitato a sinistra** con estremo superiore a

$$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} \colon x < a\},$$

— l'**intervallo aperto illimitato a destra** con estremo inferiore a

$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \colon x > a\},$$

— l'**intervallo chiuso illimitato a sinistra** con estremo superiore a

$$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \colon x \leqslant a\},$$

— l'**intervallo chiuso illimitato a destra** con estremo inferiore a

$$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \colon x \geqslant a\},$$

— l'**intervallo illimitato a sinistra e a destra**

$$(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}.$$

Dati $x \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, definiamo

— la **palla aperta centrata in x di raggio r**

$$B_x(r) = (x-r, x+r),$$

— la **palla chiusa centrata in x di raggio r**

$$\overline{B}_x(r) = [x-r, x+r].$$

Una funzione $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è detta **costante a tratti** (o **funzione a scala**) se il suo dominio può essere suddiviso in intervalli disgiunti su cui la funzione assume valori costanti.

Alcuni esempi:

—

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (-\infty,-4), \\ 2 & \text{se } x \in [-4,8), \\ -4 & \text{se } x \in [8,+\infty). \end{cases}$$

— Il **segno** è la funzione

$$\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

— La **funzione pavimento** è la funzione

$$\lfloor _ \rfloor\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \lfloor x \rfloor,$$

dove $\lfloor x \rfloor$ è l'unico $k \in \mathbb{Z}$ tale che $k \leqslant x < k+1$.

— La **funzione soffitto** è la funzione

$$\lceil _ \rceil\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \lceil x \rceil.$$

dove $\lceil x \rceil$ è l'unico $k \in \mathbb{Z}$ tale che $k-1 < x \leqslant k$.

2.4.4 Il valore assoluto

Il **valore assoluto** (o **modulo**) è la funzione

$$|_|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$x \mapsto x \cdot \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, . \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Alcune proprietà

1. **Proprietà del valore assoluto come limite superiore**:

$$\forall x \quad x \leqslant |x|, \qquad \forall x \quad -x \leqslant |x|, \qquad \forall x \quad |x| = \max\{x, -x\},$$

2. **Non negatività del valore assoluto**:

$$\forall x \quad |x| \geqslant 0,$$

3. **Simmetria del valore assoluto**:

$$\forall x \quad |x| = |-x|,$$

4. Il valore assoluto di un numero è nullo se e solo se è nullo il numero di partenza:

$$\forall x \quad (|x| = 0 \leftrightarrow x = 0),$$

5. **Proprietà moltiplicativa del valore assoluto**:

$$\forall x \forall y \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|,$$

6. **Proprietà del quadrato del valore assoluto**:

$$\forall x \quad |x|^2 = x^2,$$

7. **Disuguaglianza triangolare**:

$$\forall x \forall y \quad |x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Esercizi

Esercizio 2.1. Disporre in ordine crescente i seguenti gruppi di numeri:

1. $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, (-3)^2, (-2)^3, (-2)^{-3}, (-2)^2$.
2. $-3, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \sqrt{2}$.
3. $(-3)^2, -3^2, \sqrt{9}, (-1)^{-3}, (-1)^4, \frac{1}{(-3)^2}$.

Esercizio 2.2. Esprimere le seguenti espressioni sotto forma di un'unica frazione:

1. $\frac{1}{2} + 4$,
2. $\frac{a}{2} - a$,
3. $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b}$,
4. $\frac{a}{a+b} - \frac{b}{a-b}$,
5. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$,
6. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b}$,
7. $\frac{x}{x-1} - \frac{x}{x+1}$,
8. $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c}$.

Esercizio 2.3.

1. Sapendo che
$$x = 3y + \frac{1}{2},$$
si ricavi l'espressione di y in termini di x.
2. Sapendo che
$$x = \frac{1}{y} + 1,$$
si ricavi l'espressione di y in termini di x.
3. Sapendo che
$$y = \frac{3x-2}{x+1},$$
si ricavi l'espressione di x in funzione di y.
4. Sapendo che
$$a = \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$
si ricavi b in funzione di a e c.

Esercizio 2.4. Indicare quali proprietà (associativa, distributiva, commutativa, ecc.) si devono utilizzare per semplificare:

1. $a(a+b) - b(b+a)$,
2. $(b \cdot a) \cdot a^3$,
3. $a(5-b) - b(5-a)$,
4. $3(a+b) + 2(a+b)$,
5. $a(b+c+d)$,
6. $x(x+y) - y(x+y)$,
7. $2(a-b) + 3(b-a)$.

Esercizio 2.5. Sapendo che
$$0 < x < \frac{1}{2}, \qquad -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{4}, \qquad 1 < z < 3, \qquad -2 < w < 0,$$
che limitazioni possiamo dare per i seguenti numeri?

1. y^2,
2. $x + y$,
3. x/y,
4. $z + w$,
5. $z - w$,
6. $z \cdot w$,
7. $\max\{x, y\}$,
8. $\min\{x, w\}$,
9. $x + y + z$,
10. $x(w - z)$.

Esercizio 2.6. Fissato $x \in \mathbb{R}$, trovare:

1. $n \in \mathbb{N}$ tale che $-n < x < n$.
2. $k \in \mathbb{Z}$ tale che $k \leqslant x < k+1$.
3. $k \in \mathbb{Z}$ tale che $k-1 < x \leqslant k$.

Esercizio 2.7. Siano $a, x \in \mathbb{R}$.

1. Se $a > 1$, trovare $n \in \mathbb{N}$ tale che $a^n > x$.
2. Se $0 < a < 1$, trovare $n \in \mathbb{N}$ tale che $a^n < x$.

3 Sequenze reali

Una **sequenza di numeri reali** o **sequenza reale** è una funzione $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

— Spesso scriviamo a_n invece di $a(n)$. Tale elemento è detto n-**esimo termine** della sequenza a.

— Per indicare a in maniera esplicita, possiamo usare le notazioni

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{oppure} \qquad (a_0, a_1, a_2, \ldots).$$

Esempi

1. Fissato $c \in \mathbb{R}$, abbiamo la **sequenza costante**

$$\hat{c} = (\hat{c}_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c)_{n\in\mathbb{N}} = (c, c, c, c, \ldots).$$

2. Abbiamo la **sequenza identità**:

$$(n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 2, 3, \ldots).$$

3. La sequenza $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definita da

$$b_n = \frac{1}{n+1}$$

si può scrivere come:

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right).$$

4. La sequenza $d\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definita da $d_n = (-1)^n$ si può scrivere come:

$$(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots).$$

5. Fissato $x \in \mathbb{R}$, la sequenza $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ si può scrivere come:

$$(x^n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, x, x^2, x^3, \ldots\right).$$

6. La **sequenza di Fibonacci** $\mathtt{Fib}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è la sequenza definita da:

$$\mathtt{Fib}_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0, \\ 1 & \text{se } n = 1, \\ \mathtt{Fib}_{n-1} + \mathtt{Fib}_{n-2} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Essa si può scrivere come:

$$(\mathtt{Fib}_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots).$$

Sequenze monotone Sia $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una sequenza di numeri reali.

— Se
$$\forall m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \quad (m < n \to a_m \leqslant a_n),$$
o, equivalentemente,
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant a_{n+1},$$
allora si dice che a è **crescente**.

— Se
$$\forall m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \quad (m < n \to a_m \geqslant a_n),$$
o, equivalentemente,
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geqslant a_{n+1},$$
allora si dice che a è **decrescente**.

— Se a è crescente o decrescente, allora è detta **monotona**.

— Se
$$\forall m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \quad (m < n \to a_m < a_n),$$
o, equivalentemente,
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n < a_{n+1},$$
allora si dice che a è **strettamente crescente**.

— Se
$$\forall m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \quad (m < n \to a_m > a_n),$$
o, equivalentemente,
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > a_{n+1},$$
allora si dice che a è **strettamente decrescente**.

— Se a è strettamente crescente o strettamente decrescente, allora è detta **strettamente monotona**.

Esempi

1. La sequenza costante $(c)_{n\in\mathbb{N}} = (c, c, c, c, \ldots)$ è sia crescente che decrescente, ma non strettamente.
2. La sequenza identità $(n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 2, 3, \ldots)$ è strettamente crescente.
3. La sequenza $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$ è strettamente decrescente.
4. La sequenza $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$ non è monotona.
5. Fissato $x \in \mathbb{R}$, la sequenza $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, x, x^2, x^3, \ldots\right)$ è
   — strettamente crescente se $x \in (1, +\infty)$,
   — strettamente decrescente se $x \in (0, 1)$,
   — crescente e decrescente (e quindi costante) se $x = 1$,
   — crescente se $x = 0$, ma non strettamente, diventa costante da $n \geqslant 1$,
   — non monotona negli altri casi.
6. La sequenza di Fibonacci $(\mathtt{Fib}_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$ è crescente, ma non strettamente poiché $\mathtt{Fib}_1 = 1 = \mathtt{Fib}_2$. Diventa strettamente crescente da $n \geqslant 2$.

Sequenze limitate Sia $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una sequenza di numeri reali.

— Se
$$\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N} \quad (|a_n| \leqslant M),$$
allora si dice che a è **limitata**.

— Se a non è limitata, allora è detta **illimitata**.

Esempi

1. La sequenza costante $(c)_{n\in\mathbb{N}} = (c, c, c, c, \ldots)$ è limitata da $M = |c|$.
2. La sequenza identità $(n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 2, 3, \ldots)$ è illimitata: per ogni $M > 0$ esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $M < k$ (assioma di Archimede).
3. La sequenza $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$ è limitata da $M = 1$.
4. La sequenza $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$ è limitata da $M = 1$.

3.1 Limiti di sequenze

Sia $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una sequenza di numeri reali.

— Sia $x \in \mathbb{R}$. Se[1]
$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geqslant N \quad (|a_n - x| < \varepsilon),$$
allora si dice che a **converge** a x, e che x è il **limite** di a. Usiamo le notazioni
$$a_n \xrightarrow{n} x \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = x.$$
In generale, la sequenza a si dice **convergente** (o che **ammette limite finito**) se esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.

— Se[2]
$$\forall M > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geqslant N \quad (a_n > M),$$
allora si dice che a **diverge** a $+\infty$, e che $+\infty$ è il **limite** di a. Usiamo le notazioni
$$a_n \xrightarrow{n} +\infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

— Se[3]
$$\forall M > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geqslant N \quad (a_n < -M),$$
allora si dice che a **diverge** a $-\infty$, e che $-\infty$ è il **limite** di a. Usiamo le notazioni
$$a_n \xrightarrow{n} -\infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

— Se a non rientra nei tre casi precedenti, allora si dice che a **diverge in modo indefinito** (oppure: **diverge oscillando, non ha limite**).

— In generale, la sequenza a si dice **divergente** se è in uno dei tre casi: (1) diverge a $+\infty$, (2) diverge a $-\infty$, (3) diverge in modo indefinito. In altre parole, a è divergente se e solo se non è convergente.

[1] Leggiamo: Per ogni quantità ε "piccola quanto voglio", da un certo punto in poi la sequenza a è sempre vicina a x di una distanza minore di ε (che può essere 0).

[2] Leggiamo: Per ogni quantità M "grande quanto voglio", da un certo punto in poi la sequenza a è sempre maggiore di M.

[3] Leggiamo: Per ogni quantità M "grande quanto voglio", da un certo punto in poi la sequenza a è sempre minore di $-M$.

Nota bene! "limitata" ≠ "ha un limite"!

Osservazione 1

$$|a_n - x| < \varepsilon \qquad \text{se e solo se} \qquad a_n \in B_x(\varepsilon),$$

quindi:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x \qquad \text{se e solo se} \qquad \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geqslant N \quad (a_n \in B_x(\varepsilon)).$$

Osservazione 2 Sia $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Se a ha un limite, allora esso è univocamente determinato. In simboli:

$$\forall x \forall y \quad \left(\left(\lim_{n\to\infty} a_n = x \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} a_n = y\right) \quad \to \quad x = y\right).$$

Osservazione 3

— Ogni successione $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ convergente è limitata.

— Ogni successione $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ divergente e limitata è divergente in modo indefinito.

Esempi

1. Fissato $c \in \mathbb{R}$, consideriamo la sequenza costante $\hat{c}$. Abbiamo

   $$\lim_{n\to\infty} \hat{c} = c.$$

   Infatti: Fissiamo $\varepsilon > 0$, e scegliamo $N = 0$. Per $n \geqslant N$ (quindi in realtà $n \in \mathbb{N}$ qualsiasi) abbiamo

   $$|\hat{c}_n - c| = |c - c| = |0| = 0 < \varepsilon.$$

2. Abbiamo

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

   Infatti, sia $\varepsilon > 0$. Per l'assioma di Archimede (variante con ε), esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

   $$\frac{1}{N} < \varepsilon.$$

   Sia $n \geqslant N$. Poiché $n < n+1$, per la proprietà transitiva segue $N < n+1$. Per la proprietà della reciprocità inversa si ha

   $$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{N}.$$

   Infine:

   $$\left|\frac{1}{n+1} - 0\right| = \left|\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

3. La sequenza identità $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente. Infatti, supponiamo che esista un limite x. Allora esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

   $$\forall n \geqslant N \quad \left(|n - x| < \frac{1}{4}\right).$$

   In particolare devono valere

   $$|N - x| < \frac{1}{4} \qquad \text{e} \qquad |N + 1 - x| < \frac{1}{4}.$$

Segue:

$$\begin{aligned} 1 &= |1 + (N - x) - (N - x)| \\ &\leqslant |N + 1 - x| + |N - x| \\ &< \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

contraddizione.

4. Abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} n = +\infty.$$

Infatti, sia $M > 0$. Per l'assioma di Archimede (vedi conseguenze), esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$N - 1 < M \leqslant N.$$

Sia $n \geqslant N$. Per la proprietà transitiva, abbiamo $M < n$.

Proprietà dei limiti di sequenze Siano $a, b \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sequenze convergenti, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora valgono le seguenti proprietà:

1. **Continuità del limite rispetto all'addizione**:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} (a_n) + \lim_{n\to\infty} (b_n),$$

2. **Continuità del limite rispetto alla moltiplicazione**:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} (a_n) \cdot \lim_{n\to\infty} (b_n),$$

3. **Omogeneità** (o **proprietà del limite rispetto alla moltiplicazione per uno scalare**):

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} (a_n),$$

4. **Continuità del limite rispetto al quoziente**:

Se $\lim_{n\to\infty} (b_n) \neq 0$, allora esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \geqslant N \quad b_n \neq 0.$$

Inoltre:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b_{N+n}} \right) = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} (b_n)} \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{N+n}}{b_{N+n}} \right) = \frac{\lim_{n\to\infty} (a_n)}{\lim_{n\to\infty} (b_n)}.$$

In questi casi, per semplicità, spesso omettiamo "$N +$".

5. **Monotonia** (o **teorema del confronto**):

$$\forall n \in \mathbb{N} (a_n \leqslant b_n) \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n.$$

3.2 Sequenze di Cauchy

Sequenze di Cauchy Una sequenza $a \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ si dice **di Cauchy** se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists C \in \mathbb{N} \; \forall m, n \geqslant C \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

In altre parole, i termini della successione diventano arbitrariamente vicini **tra loro** quando i due indici sono sufficientemente grandi. La condizione $|a_n - a_{n-1}| \to 0$ è necessaria, ma non sufficiente: per esempio, le somme parziali della serie armonica soddisfano $|a_n - a_{n-1}| = 1/n \to 0$ e tuttavia non formano una successione di Cauchy.

Osservazione Ogni successione reale convergente è di Cauchy: se i termini sono vicini al limite, allora, per la disuguaglianza triangolare, sono vicini anche tra loro. Il viceversa, in generale falso per successioni a valori in insiemi numerici diversi da $\mathbb{R}$, sarà una conseguenza dell'assioma di completezza, presentato nel capitolo seguente.

Esercizi

Esercizio 3.1. Scrivere i primi dieci termini delle sequenze:

1. $(1)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. $(n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. $\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
8. $((-1)^n \cdot n)_{n\in\mathbb{N}}$.
9. $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
10. $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
11. $\left(\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
12. $\left(\frac{n^2+n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
13. $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
14. $\left(\frac{(-1)^n+n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
15. $\left(\frac{\sin n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
16. La **sequenza di Fibonacci**:
$$\mathrm{Fib}_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0, \\ 1 & \text{se } n = 1, \\ \mathrm{Fib}_{n-1} + \mathrm{Fib}_{n-2} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esercizio 3.2. Dire se la sequenza $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente, decrescente, limitata, convergente, e calcolarne il limite nei seguenti casi:

1. $x = 1$,
2. $x = 0$,
3. $x = -1$,
4. $x = \frac{1}{2}$,
5. $x = -\frac{1}{2}$,
6. $x = \sqrt{2}$,
7. $x = -\sqrt{2}$.
8. $x > 1$,
9. $0 < x < 1$,
10. $x < -1$,
11. $-1 < x < 0$.

Esercizio 3.3. Trovare un esempio di una sequenza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nei seguenti casi:

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata ma non ha un limite.
2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è sia crescente che decrescente, ma non strettamente.
3. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente e limitata.
4. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente e non limitata inferiormente.
5. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è oscillante tra due valori finiti.
6. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è né crescente né decrescente, ma convergente.

Esercizio 3.4. Dire se i seguenti limiti esistono, in caso affermativo calcolarli utilizzando la definizione di limite:

1. $\lim_{n\to\infty} 1$.
2. $\lim_{n\to\infty} n$.
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$.
4. $\lim_{n\to\infty} 0^n$.
5. $\lim_{n\to\infty} 1^n$.
6. $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$.

7. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$.
8. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$.
9. $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
10. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}$.

Esercizio 3.5. Calcolare:

1. $\lim_{n\to\infty} \left(8+\frac{2024}{n}\right)\left(7-\frac{2025}{n}\right)$.
2. $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{2024}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{2025n}\right)$.
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-200n}{n^2+300}$.
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot n^2+14\cdot n}{n^2-2}$.
5. $\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot n^2+14\cdot n}{n^3-2}$.
6. $\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot n^3+14\cdot n}{n^2-2}$.
7. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2-4}}{9n}$.
8. $\lim_{n\to\infty} (1+10^{-10})^n$.
9. $\lim_{n\to\infty} (1-10^{-10})^n$.
10. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$.
11. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+5}{2n^3+n}$.
12. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$.
13. $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2-n^2}{n}$.
14. $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+2^n}{3^n-2^n}$.
15. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$.
16. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3n}}{n+2}$.
17. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+1}-2n}{n}$.
18. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{n+1}$.
19. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+1}}{n}$.
20. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3+1}-2n}{n}$.
21. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+3n^2+1}}{n^2+1}$.
22. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+5n+6}-n}{n}$.
23. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}-n}{1}$.
24. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}}{1}$.
25. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n^2+4n}-3n}{n}$.
26. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2+1}$.
27. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+4n}-n}{n^2}$.
28. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}-n}{\frac{1}{n}}$.
29. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+4n+5}-n}{2}$.
30. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n+1}-\sqrt{n^2+n}}{1}$.
31. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n}{n^3+n^2+1}$.
32. $\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n+\frac{1}{n}}$.
33. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1/n}$.
34. $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{n}$.
35. $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2+1)}{n}$.
36. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$.
37. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n}$.

38. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3^n + 2^n}{3^n - 2^n}$.

39. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$.

40. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Esercizio 3.6. Calcolare $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n|$ nei seguenti casi:

1. $a_n = (-1)^n$,
2. $a_n = \dfrac{1}{n}$,
3. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$,
4. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$,
5. $a_n = \dfrac{1}{2^n}$.

Esercizio 3.7. Calcolare $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ nei seguenti casi:

1. $a_n = (-1)^n$,
2. $a_n = \dfrac{1}{n}$,
3. $a_n = \dfrac{1}{2^n}$,
4. $a_n = \dfrac{n!}{(2n)!}$,
5. $a_n = -\dfrac{n}{2^n}$,
6. $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$.

4 Completezza dei reali, radici e potenze razionali

4.1 L'assioma di completezza

Ora che abbiamo introdotto limiti e successioni di Cauchy, possiamo formulare la proprietà che distingue $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$.

Assioma di completezza Ogni sequenza di Cauchy a valori reali è convergente a un numero reale. Poiché ogni successione convergente è di Cauchy, questo completa il **criterio di Cauchy**: una successione reale converge se e solo se è di Cauchy.

Alcune conseguenze

1. **Proprietà del continuo**:

   Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto.

   — Se $\uparrow S \neq \emptyset$, allora esiste $\sup S$.

   — Se $\downarrow S \neq \emptyset$, allora esiste $\inf S$.

2. **Teorema di convergenza monotona**:

   Se $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è una sequenza monotona limitata, allora è convergente.

4.1.1 Le radici

Il metodo di Herone Sia $x \in [0, +\infty)$. Per $x = 0$ la radice quadrata sarà 0; per costruire la radice di $x > 0$ consideriamo la seguente successione. Definiamo:

$$a_n = \begin{cases} \max\{1, x\} & \text{se } n = 0, \\ \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{x}{a_{n-1}}\right) & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Osserviamo che la sequenza a soddisfa le seguenti proprietà.

— Sempre positiva.

— $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n^2 \geqslant x$:

Nel caso $n = 0$, abbiamo $a_0 = \max\{1, x\}$, da cui $a_0^2 \geqslant x$.

Consideriamo il caso $n > 0$. Da $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{x}{a_{n-1}}\right)$, otteniamo l'equivalente

$$a_{n-1}^2 - 2a_n a_{n-1} + x = 0.$$

Sappiamo che questa equazione di secondo grado in a_{n-1} ha soluzione,[1] perciò il suo discriminante deve essere $\geqslant 0$:

$$4a_n^2 - 4x \geqslant 0,$$

da cui concludiamo $a_n^2 \geqslant x$ anche in questo caso.

— Decrescente:

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{x}{a_{n-1}}\right) - a_{n-1} = \frac{1}{2}\frac{x - a_{n-1}^2}{a_{n-1}} \leqslant 0,$$

quindi $a_n \leqslant a_{n-1}$.

— Limitata da $M = \max\{1, x\}$ e, per $x > 0$, separata da zero: poiché $a_n^2 \geqslant x \geqslant (\min\{1, x\})^2$ e $a_n > 0$, si ha $a_n \geqslant \min\{1, x\} > 0$.

Poiché è sempre positiva e decrescente, allora è compresa tra 0 e a_0, dunque

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < a_n \leqslant \max\{1, x\},$$

da cui

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leqslant \max\{1, x\}.$$

— Convergente:

Segue dal teorema di convergenza monotona.—Ma qual è il suo limite?

Chiamiamo $\ell = \lim_{n\to\infty} a_n$. Per $x > 0$ abbiamo $\ell \geqslant \min\{1, x\} > 0$, quindi la divisione per ℓ nel passaggio seguente è lecita. Allora

$$\ell = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{x}{a_{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_{n-1} + \frac{x}{\lim_{n\to\infty} a_{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{x}{\ell}\right).$$

Da cui:

$$\ell^2 = x.$$

Nel caso $x = 0$ la radice si definisce direttamente uguale a 0.

La radice quadrata Ricapitolando: Dato un qualsiasi $x \in [0, +\infty)$, abbiamo un metodo per costruire un numero ℓ tale che

$$\ell^2 = x.$$

Questo ℓ è detto **radice quadrata** di x.

Definiamo la funzione **radice quadrata**

$$\sqrt{\square}\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \ell,$$

dove ℓ è appunto la radice quadrata di x.

Nota bene! La radice quadrata non è definita per numeri negativi, e non assume mai valori negativi.

In particolare, $\sqrt{1} = 1$ e non $\sqrt{1} = -1$ (anche se $(-1)^2 = 1$).

[1] L'abbiamo costruita attraverso il processo iterativo!

La radice n-esima Più in generale, fissato $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > 0$ è pari, dato un qualsiasi $x \in [0, +\infty)$, è possibile trovare una sequenza a tale che

$$\left(\lim_{k\to\infty} a_k\right)^n = x.$$

Questo limite $\ell = \lim_{k\to\infty} a_k$ è detto **radice n-esima** di x.

Definiamo la funzione **radice n-esima**

$$\sqrt[n]{\square}\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \ell,$$

dove ℓ è appunto la radice n-esima di x.

Se, invece $n > 0$ è dispari, dato un qualsiasi $x \in \mathbb{R}$, è possibile trovare una sequenza a tale che

$$\left(\lim_{k\to\infty} a_k\right)^n = x.$$

Questo limite $\ell = \lim_{k\to\infty} a_k$ è detto **radice n-esima** di x.

Anche in questo caso definiamo la funzione **radice n-esima**

$$\sqrt[n]{\square}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ell,$$

dove ℓ è appunto la radice n-esima di x.

4.1.2 Numeri razionali

L'insieme dei **numeri razionali** $\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri che si possono scrivere come

$$\frac{m}{n}, \quad \text{oppure} \quad -\frac{m}{n},$$

dove $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Esso soddisfa tutti gli assiomi dei numeri reali tranne l'assioma di completezza, poiché, ad esempio $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

L'insieme dei **numeri irrazionali** è definito come $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

4.1.3 L'elevamento a potenza con esponente razionale

Sia $a > 0$ e sia $r = m/n \in \mathbb{Q}$, con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. Definiamo

$$a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Per $a > 0$ questa definizione non dipende dalla rappresentazione della frazione m/n e valgono le consuete proprietà delle potenze. Per $a = 0$ l'elevamento a esponente razionale positivo è definito e vale zero; per esponenti negativi la base deve essere non nulla.

Nota bene! Per basi negative bisogna prestare attenzione al dominio delle radici: per esempio, $(-1)^{1/2}$ non è un numero reale, mentre $(-1)^{1/3} = -1$. In questi casi si lavora con frazioni ridotte ai minimi termini e con denominatore dispari. Non si possono utilizzare indiscriminatamente tutte le identità delle potenze senza verificare che le espressioni siano definite nei reali.

Le proprietà delle potenze Per basi positive, le proprietà delle potenze si estendono agli esponenti razionali:

1. **Proprietà distributiva degli esponenti rispetto all'addizione** (o **proprietà della moltiplicazione di potenze con la stessa base**)
$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n,$$

2. **Proprietà della potenza di una potenza**:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n},$$

3. **Proprietà della potenza del prodotto**:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n.$$

Esercizi

Esercizio 4.1. Determinare quali dei seguenti numeri sono razionali:

1. $4/5$,
2. 0.8,
3. $\sqrt{3}$,
4. $\sqrt{4}$,
5. $\sqrt{25}$,
6. $\sqrt{2}$,
7. π,
8. $\dfrac{\sqrt{9}}{3}$,
9. $\dfrac{\sqrt{8}}{2}$,
10. $\sqrt{0.04}$,
11. $0.\overline{3}$,
12. $\sqrt[3]{8}$.

Esercizio 4.2. Esprimere le seguenti espressioni nella forma a^r:

1. $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{8}$,
2. $\dfrac{7}{63} : \dfrac{1}{81}$,
3. $\sqrt[3]{81}/\sqrt{27}$,
4. $\dfrac{1}{\sqrt{15}\sqrt{\frac{1}{5}}}$,
5. $\sqrt{a} \cdot a^{\frac{3}{2}}$,
6. $\dfrac{a^3}{a^{\frac{1}{2}}}$,
7. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^4}}$,
8. $(a^{\frac{1}{2}})^4$,
9. $\dfrac{b^3}{b^{-2}}$.

Esercizio 4.3. La formula per calcolare il volume di una sfera di raggio r è

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

1. Calcolare il volume della sfera di raggio 10.
2. Se il raggio della sfera raddoppia, di quanto aumenta il volume?
3. Che raggio deve avere la sfera per ottenere un volume pari a 9π?
4. Sapendo che la sfera 1 ha raggio r_1 e volume V_1, che raggio deve avere la sfera 2 per ottenere un volume $V_2 = 4V_1$?

La superficie totale di una sfera è $S = 4\pi r^2$. Determinare:

5. Il raggio di una sfera con $S = 16\pi$.
6. Il nuovo raggio se la superficie diventa quattro volte maggiore.

La formula per il volume di un cubo di lato ℓ è

$$V = \ell^3.$$

7. Quale deve essere il lato di un cubo di volume 64?
8. Se il volume di un cubo A è il triplo di quello di un cubo B, quale relazione c'è tra i loro lati?

Esercizio 4.4. Trovare l'errore:

1. $\sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{(-1)^2} = \sqrt[4]{1} = 1.$

2. $-1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1.$
   Quindi $-1 = 1$.

3. Sia $x = -1$. Allora:
   $2 = 1 + 1 = 1 + \sqrt{1} = 1 + \sqrt{x^2} = 1 - 1 = 0$
   Quindi $2 = 0$.

4. Sia $x = 0$. Allora:
$$\begin{aligned} x &= -x \\ 2x &= -2x \\ x^2 + 2x - 1 &= x^2 - 2x + 1 \\ (x+1)^2 &= (x-1)^2 \\ x + 1 &= x - 1 \\ 1 &= -1 \end{aligned}$$
   Quindi $1 = -1$.

5. Sia $x \in \mathbb{R}$ qualsiasi, e sia $y = x$. Allora:
$$\begin{aligned} x &= y \\ x^2 &= xy \\ x^2 - y^2 &= xy - y^2 \\ (x-y)(x+y) &= (x-y)y \\ x + y &= y \\ x &= 0. \end{aligned}$$
   Quindi ogni numero reale è uguale a 0.

6. Sia $x \in \mathbb{R}$ qualsiasi, e sia $y = -x$. Allora:
$$\begin{aligned} -x &= y \\ (-x)^2 &= y^2 \\ x^2 &= y^2 \\ x^2 - y^2 &= 0 \\ (x-y)(x+y) &= 0 \\ x - y &= 0 \\ x &= y \\ x &= -x. \end{aligned}$$
   Quindi ogni numero reale è uguale al proprio opposto.

7. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ qualsiasi, e sia $z = x - y$. Allora:
$$\begin{aligned} x - y &= z \\ (x-y)^2 &= z(x-y) \\ (x-y)^2 - z^2 &= z(x-y) - z^2 \\ (x-y-x)(x-y+z) &= z(x-y-z) \\ x - y + z &= z \\ x - y &= 0 \\ x &= y. \end{aligned}$$
   Quindi tutti i numeri reali sono uguali tra loro.

8. Sia $x \in \mathbb{R}$ qualsiasi. Allora:
$$\begin{aligned} 2 &> 1 \\ 2x &> x \\ 2x - x &> 0 \\ x &> 0 \end{aligned}$$
   Quindi ogni numero reale è maggiore di 0.

9. Sia $x \in \mathbb{R}$ qualsiasi. Allora:
$$\begin{aligned} x + 1 &> x \\ x(x+1) &> x^2 \\ x^2 + x &> x^2 \\ x &> 0 \end{aligned}$$
   Quindi ogni numero reale è maggiore di 0.

10. Sia $x \in \mathbb{R}$ qualsiasi, e sia $y = x + 1$. Allora:
$$\begin{aligned} x &< y \\ (x - xy)x &< y(x - xy) \\ x^2 - x^2y &< xy - xy^2 \\ xy^2 - x^2y &< xy - x^2 \\ xy(y-x) &< x(y-x) \\ y &< 1 \\ x + 1 &< 1 \\ x &< 0. \end{aligned}$$
    Quindi ogni numero reale è minore di 0.

Esercizio 4.5. Vero o falso? Motivare.

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad x + 81 > x + 80.$
2. $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + x > x.$
3. $\forall x \in \mathbb{R} \quad 4x^2 \leqslant (2x) \cdot (2x).$
4. $\forall x \in \mathbb{R} \quad 4x < 4x^2.$
5. $\forall x \in \mathbb{R} \quad 4x \geqslant 4x^2.$
6. $\forall x \in \mathbb{R} \quad 4x^2 \leqslant 4x^4.$
7. $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \geqslant -x.$
8. $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \leqslant x^2.$

9. $\forall x \in \mathbb{R} \quad |2x| = |x| + |x|$.
10. $\forall x \in [0, +\infty) \quad \sqrt{x} \leqslant x$.
11. $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x > 1 \Rightarrow 4x < 4x^2)$.
12. $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x < 0 \Rightarrow x < x^4)$.
13. $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x > 0 \Rightarrow x < x^4)$.
14. $\forall x \in [0, +\infty) \quad (\sqrt{x} > x \Rightarrow |x| < 1)$.
15. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \dfrac{x-1}{x^2+1} > -1$.
16. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sqrt{x^2+1} < x^2 + 1$.
17. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sqrt{x^2+1} \leqslant x^2 + 1$.
18. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(3 < 5(x-3) \Rightarrow \dfrac{3}{x-3} < 5\right)$.
19. $\forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{3\} \quad \left(\dfrac{3}{x-3} < 5 \Rightarrow 3 < 5(x-3)\right)$.
20. $\forall x \in [0, +\infty) \quad (x^{\frac{1}{2}} < x \Rightarrow x < x^2)$.
21. $\forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \quad (x^{-1} < x \Rightarrow x^{-2} < x^2)$.
22. $\forall x \in [0, +\infty) \quad (x < 0 \Rightarrow x^2 < 0)$.
23. $\forall x \in \mathbb{R} \quad x = \max\{x, -x\}$.
24. $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \geqslant 0$.
25. $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leqslant |x| \wedge -x \leqslant |x|$.
26. $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| = |-x|$.
27. $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
28. $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
29. $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x|^2 = x^2$.
30. $\exists x \in \mathbb{R} \quad x + 2 = x^2$.
31. $\exists x \in \mathbb{R} \quad 2x = x^2$.
32. $\exists x \in \mathbb{R} \quad 2x > x^2$.
33. $\exists x \in \mathbb{R} \quad (x+1)^2 < -x^2$.
34. $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 = -x$.
35. $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad |x + y| \leqslant |x| + |y|$.
36. $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \quad \left|\dfrac{1}{y}\right| = \dfrac{1}{|y|}$.
37. $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \quad \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.
38. $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad ||x| - |y|| \leqslant |x - y|$.
39. $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad |x - y| \leqslant |x| + |y|$.
40. $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad |x + y| = |x| + |y|$.
41. $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \quad x < y$.
42. $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} \quad x < y$.
43. $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y < 0$.
44. $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} \quad x \cdot y < 0$.
45. $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad (x < y \Rightarrow x^2 < y^2)$.
46. $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad (x < y \Rightarrow x^2 < y^2)$.
47. $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \quad (x < y \Rightarrow x^2 < y^2)$.
48. $\forall x \in [0, +\infty) \forall y \in [0, +\infty) \quad (x < y \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} < y^{\frac{1}{2}})$.

Per approfondire: metodi iterativi per le radici

Esercizio 4.6. Sia $x \in [0, +\infty)$. Definiamo:

$$a_n = \begin{cases} \max\{1, x\} & \text{se } n = 0, \\ \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{x}{a_{n-1}}\right) & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Osservare che la sequenza a soddisfa le seguenti proprietà:

1. a è sempre positiva.
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n^2 \geqslant x$.
3. a è decrescente.
4. a è convergente.
5. $\left(\lim_{n \to +\infty} a_n\right)^2 = x$.

Esercizio 4.7. Sia $x \in [0, +\infty)$. Definiamo:

$$a_n = \begin{cases} \max\{1, x\} & \text{se } n = 0, \\ \frac{1}{3}\left(2a_{n-1} + \frac{x}{a_{n-1}^2}\right) & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Osservare che la sequenza a soddisfa le seguenti proprietà:

1. a è sempre positiva.
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n^3 \geqslant x$.
3. a è decrescente.
4. a è convergente.
5. $\left(\lim_{n \to +\infty} a_n\right)^3 = x$.

5 Somme infinite

Sia a una sequenza di numeri reali. La **sequenza di somme parziali** di a è la sequenza

$$s = \left(\sum_{n=0}^{k} a_n \right)_{k \in \mathbb{N}}.$$

Ovvero:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0, \\ s_1 &= a_0 + a_1, \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2, \\ &\vdots \\ s_k &= a_0 + a_1 + \ldots + a_k, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Scriviamo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots.$$

Più in generale, per $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=N}^{N+k} a_n = a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_{N+k} + \ldots.$$

Un'espressione di questo tipo si chiama **somma infinita**.

Una somma infinita $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ è detta

— **convergente** se esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $\sum_{n=N}^{\infty} a_n = x$,

— **divergente** se non è convergente:

- **divergente a** $+\infty$ se $\sum_{n=N}^{\infty} a_n = +\infty$,
- **divergente a** $-\infty$ se $\sum_{n=N}^{\infty} a_n = -\infty$,
- **divergente in modo indefinito** in tutti gli altri casi.

Esempi

1. Sia a la sequenza costante $\hat{0}$. Allora:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 0 = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} 0 = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

   Visivamente: $0 + 0 + 0 + ... + 0 + ... = 0$.

2. Sia a la sequenza costante $\hat{1}$. Allora:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} 1 = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty.$$

   Visivamente: $1 + 1 + 1 + ... + 1 + ... = +\infty$.

3. Sia a la sequenza costante $\widehat{(-1)}$. Allora:

$$\sum_{n=0}^{\infty} -1 = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} -1 = \lim_{n\to\infty} -(n+1) = -\infty.$$

   Visivamente: $-1 - 1 - 1 - ... - 1 - ... = -\infty$.

4. Si consideri la sequenza $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Allora:

$$\sum_{n=0}^{k} (-1)^n = \begin{cases} 1 - 1 + 1 - 1 + ... + 1 = 1 & \text{se } k \text{ pari} \\ 1 - 1 + 1 - 1 + ... - 1 = 0 & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases}$$

   Quindi la somma infinita diverge in modo indefinito.

Scrittura telescopica Sia a una sequenza di numeri reali. Osserviamo che, se $k > 0$:

$$\begin{aligned} a_k &= a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + ... + (a_k - a_{k-1}) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{k} (a_n - a_{n-1}) \\ &= a_0 + \sum_{n=0}^{k-1} (a_{n+1} - a_n). \end{aligned}$$

Questa è detta **scrittura telescopica** di a_k.

Osservazione Sia a una sequenza di numeri reali. Allora:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} (a_n - a_{n-1}) \\ &= \lim_{k\to\infty} (a_k - a_0) \\ &= \left(\lim_{k\to\infty} a_k\right) - a_0. \end{aligned}$$

Esempio Supponiamo di voler calcolare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Osserviamo:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n^2 - n^2 + 1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}.$$

Quindi, se consideriamo la sequenza a definita da:

$$a_n = \frac{n}{n+1},$$

otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}).$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) \\
&= \left(\lim_{k\to\infty} a_k \right) - a_0 \\
&= \left(\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} \right) - \frac{0}{0+1} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k(1+\frac{1}{k})} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{k}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Proprietà delle somme infinite Siano a, b sequenze di numeri reali le cui serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergono, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora valgono le seguenti proprietà:

1. **Continuità della somma infinita rispetto all'addizione**:

$$\sum_{n=N}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n + \sum_{n=N}^{\infty} b_n,$$

2. **Omogeneità** (o **proprietà della somma infinita rispetto alla moltiplicazione per uno scalare**):

$$\sum_{n=N}^{\infty} \lambda \cdot a_n = \lambda \cdot \sum_{n=N}^{\infty} a_n.$$

Serie geometrica Sia $x \in \mathbb{R}$ tale che $|x| < 1$, e sia $k \in \mathbb{N}$. L'espressione

$$\sum_{n=0}^{k} x^n$$

si chiama **serie geometrica di ragione** x. Abbiamo:

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}.$$

Infatti:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{k} x^n &= \sum_{n=0}^{k} \frac{x-1}{x-1} x^n \\
&= \frac{1}{x-1} \sum_{n=0}^{k} (x-1)(x^n) \\
&= \frac{1}{x-1} \sum_{n=0}^{k} (x^{n+1} - x^n) \\
&= \frac{1}{x-1} \left(\sum_{n=0}^{k-1} (x^{n+1} - x^n) + (x^{k+1} - x^k) \right) \\
&= \frac{1}{x-1} \left((x^k - 1) + (x^{k+1} - x^k) \right) \\
&= \frac{x^{k+1} - 1}{x-1} \\
&= \frac{1 - x^{k+1}}{1-x}.
\end{aligned}$$

Sia $x \in \mathbb{R}$ tale che $|x| < 1$. L'espressione

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

si chiama **serie geometrica infinita di ragione** x. Abbiamo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} x^n = \lim_{k\to\infty} \frac{1-x^{k+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

5.1 Criteri di convergenza

Criterio di convergenza di Cauchy Sia a una sequenza di numeri reali. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

(a) La somma infinita $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

(b) Vale il **criterio di convergenza di Cauchy**:[1]

$$\forall \varepsilon > 0 \exists C \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} \left(n \geqslant m \geqslant C \to \left| \sum_{i=m+1}^{n} a_i \right| < \varepsilon \right).$$

Conseguenza Sia a una sequenza di numeri reali. Se la somma infinita $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Nota bene! In generale, la direzione opposta non è valida! Infatti, ad esempio,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \text{ma} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

[1] Leggiamo: Per ogni quantità ε "piccola quanto voglio", da un certo punto in poi, il valore assoluto di ogni somma di termini consecutivi della coda della serie è minore di ε.

Conseguenza: Criterio di non-convergenza Sia a una sequenza di numeri reali. Se

— a diverge, oppure

— $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$,

allora la somma infinita $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

Criterio del confronto Siano (a_n) e (b_n) due successioni tali che, definitivamente, $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$. Allora:

— se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge;

— se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$, anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge a $+\infty$.

Criterio del confronto asintotico Siano $a_n, b_n > 0$ definitivamente e supponiamo che esista

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, +\infty).$$

Allora le serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso comportamento: convergono entrambe oppure divergono entrambe a $+\infty$. Se invece $\ell = 0$, la convergenza di $\sum b_n$ implica quella di $\sum a_n$; se $\ell = +\infty$, la divergenza di $\sum b_n$ implica quella di $\sum a_n$. Per successioni di segno variabile, i medesimi confronti si possono applicare alle serie dei valori assoluti, per studiare la **convergenza assoluta**.

Criterio del quoziente / Criterio di D'Alembert Sia a una sequenza di numeri reali con $a_n \neq 0$ definitivamente e supponiamo che esista

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

— Se $\ell < 1$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

— Se $\ell > 1$ o $\ell = +\infty$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

— Se $\ell = 1$, il criterio non permette di concludere.

Esercizi

Esercizio 5.1. Calcolare:

1. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
2. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n(n+1)}$.
4. $\sum_{n=3}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
5. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{4^n}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty}5\frac{1}{5^n}$.
8. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{5^n}$.
9. $\sum_{n=10}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
10. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$.
11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}$.
12. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n!}$.
13. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$.
14. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)!}$.
15. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n+2)!}$.
16. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\pi/4)^{2n}}{(2n+1)!}$.
17. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\pi/3)^{2n+1}}{(2n+2)!}$.
18. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\,x^n}{n!}$.
19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$.
    Suggerimento: Utilizzare il fatto che $\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$.

Esercizio 5.2. Per quali valori di $a, r \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge? Calcolarne il valore.

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

Esercizio 5.3. Dimostrare che $0.\bar{9} = 1$.

Esercizio 5.4. Dire se le seguenti somme convergono, utilizzando il criterio opportuno:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!}$.
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n+1}$.
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$.
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$.
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$,
dove $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ è fissato.
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+4n}$.
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+\sqrt{n}}$.
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$.
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2^n}$.
22. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n+2}{n!}$.
23. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{2n+1}{n!}$.
24. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.
25. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$.
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+n^2}$.
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$.
28. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$.
29. $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n$
per $|r| < 1$.
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$.
31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$.
32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n^2}$.
33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.
34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}+n}$.
35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
37. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}$.
38. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.
39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$.
40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$.

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}$.

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}$.

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

45. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)}$.

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$.

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$

48. serie esponenziale
$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

49. serie seno
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

50. serie coseno
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

51. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

52. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

53. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

Per approfondire

Esercizio 5.5. Calcolare:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)(2n+1)}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

6. $\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Esercizio 5.6. Sia $x \in (0,1)$. Calcolare:
$S = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$.
Suggerimento: Calcolare $S - xS$.

6 Funzioni elementari

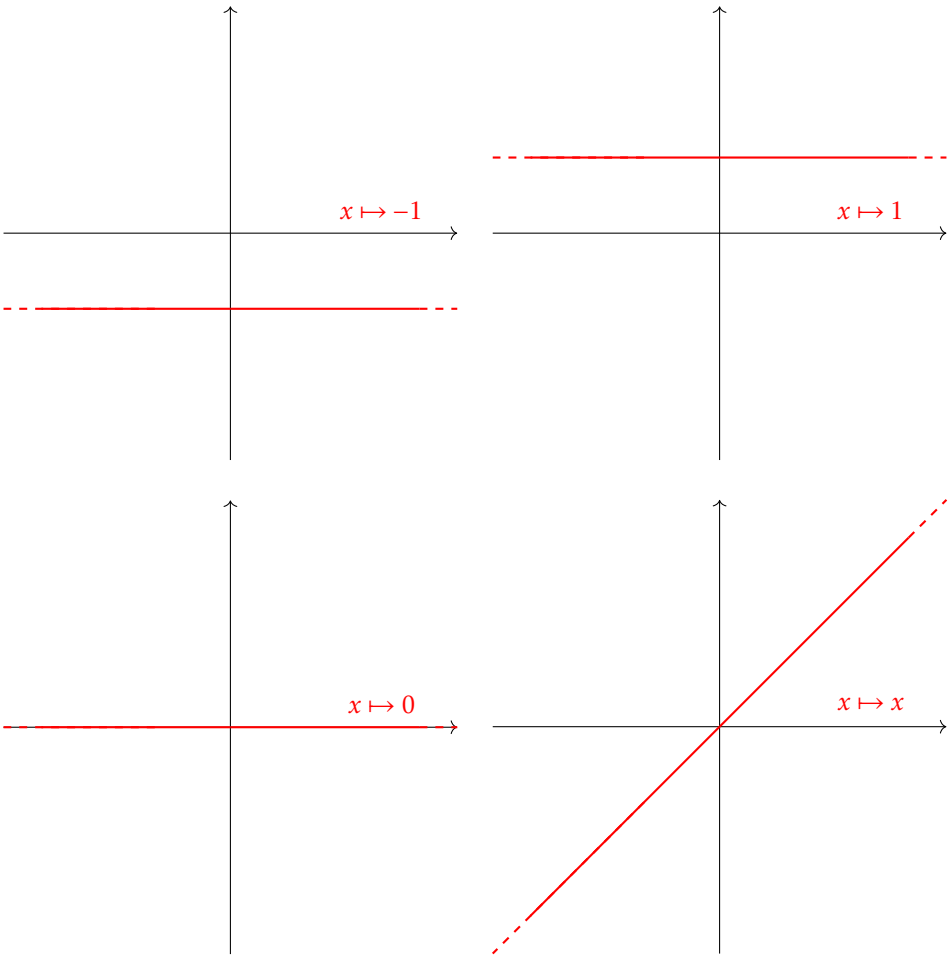
Una **funzione reale di variabile reale** è una funzione $f\colon D \to \mathbb{R}$, dove $D \subseteq \mathbb{R}$.

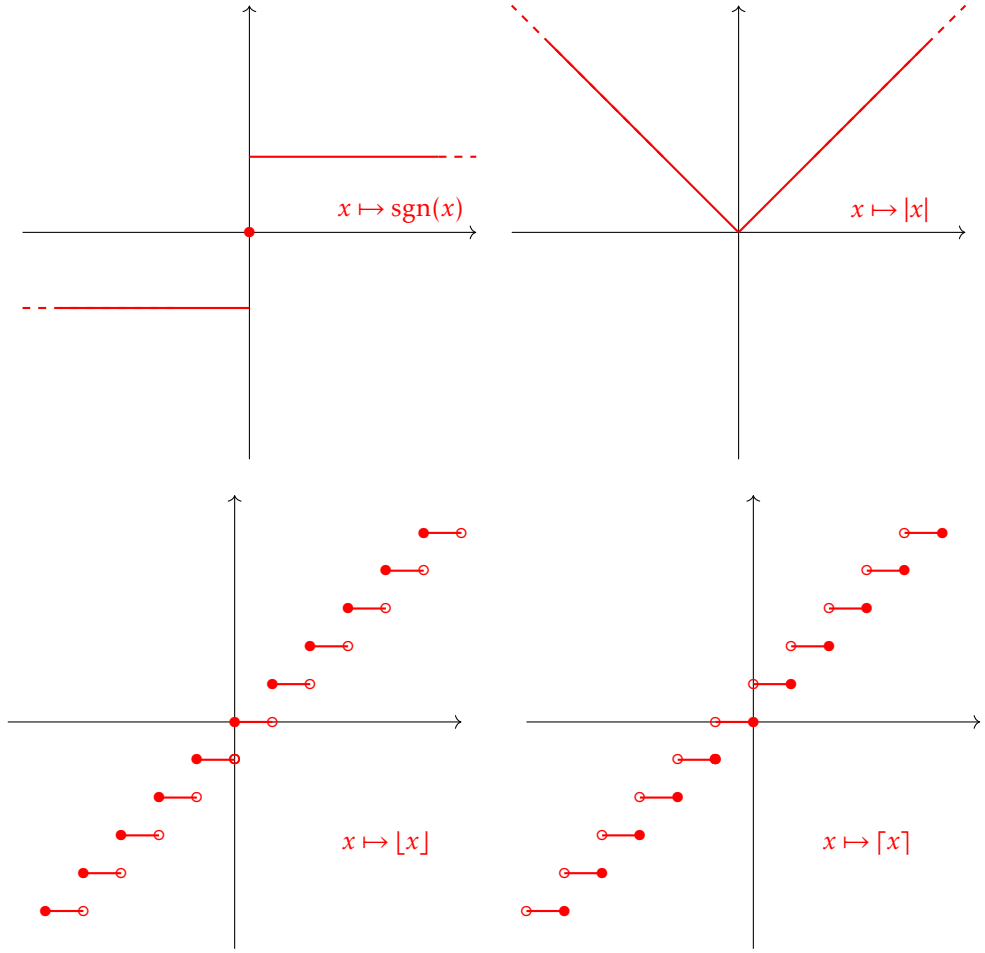
Il **grafico** di f è l'insieme

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \colon y = f(x)\}.$$

In genere il grafico viene rappresentato sul piano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Esempi





Operazioni tra funzioni reali di variabile reale Sia $D \subseteq \mathbb{R}$, siano $f, g \colon D \to \mathbb{R}$, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Definiamo le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} f+g &\colon D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)+g(x), \\ \lambda f &\colon D \to \mathbb{R}, x \mapsto \lambda \cdot f(x), \\ f \cdot g &\colon D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) \cdot g(x), \\ \frac{f}{g} &\colon D^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}, \end{aligned}$$

dove $D^* = \{x \in D \colon g(x) \neq 0\}$.

Composizione di funzioni reali di variabile reale Siano $D, E \subseteq \mathbb{R}$, e siano $f \colon D \to \mathbb{R}$ e $g \colon E \mapsto \mathbb{R}$ tali che $\operatorname{Im}(f) \subseteq E$. Allora possiamo fare la **composizione**:

$$D \xrightarrow[f]{} E \xrightarrow[g]{} \mathbb{R}, \qquad g \circ f$$

Funzioni elementari Sono dette **elementari** un insieme di funzioni dalle quali si ottengono, mediante somma, prodotto, quoziente e composizione, le funzioni reali più comunemente usate in matematica e scienze applicate:[1]

[1] **Nota bene:** Questa classificazione non è rigida e può subire leggere variazioni. Ad esempio, alcune fonti potrebbero includere altre funzioni, come le funzioni lineari, o escludere alcune categorie in base a esigenze specifiche.

— le funzioni potenza,

— le funzioni esponenziali e logaritmiche,

— le funzioni trigonometriche e trigonometriche inverse.

6.1 Funzioni potenza

Una **funzione potenza** è una funzione f della forma

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^a,$$

dove l'**esponente** è un valore reale fissato, e D è un opportuno sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

Alcuni esempi di funzioni potenza includono:

— la funzione costante $\hat{1} : x \mapsto x^0$,

— la funzione identità $\mathrm{id} : x \mapsto x^1$,

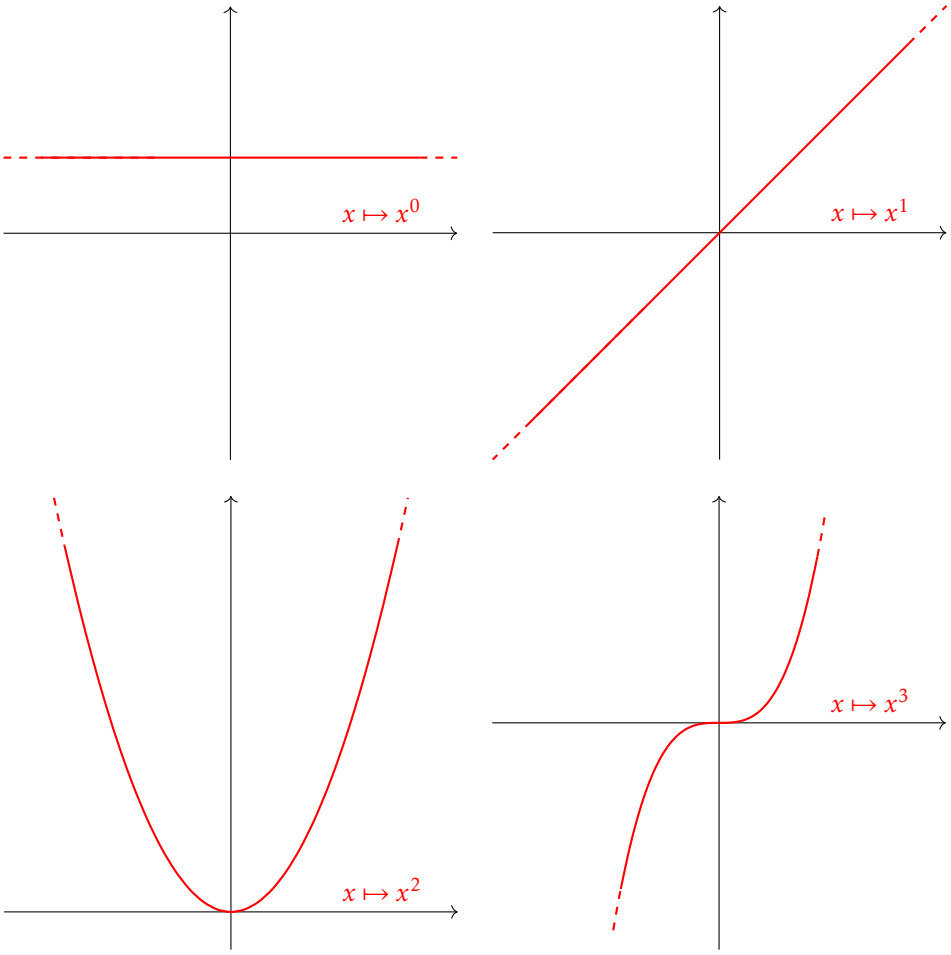
— la funzione quadrato $x \mapsto x^2$,

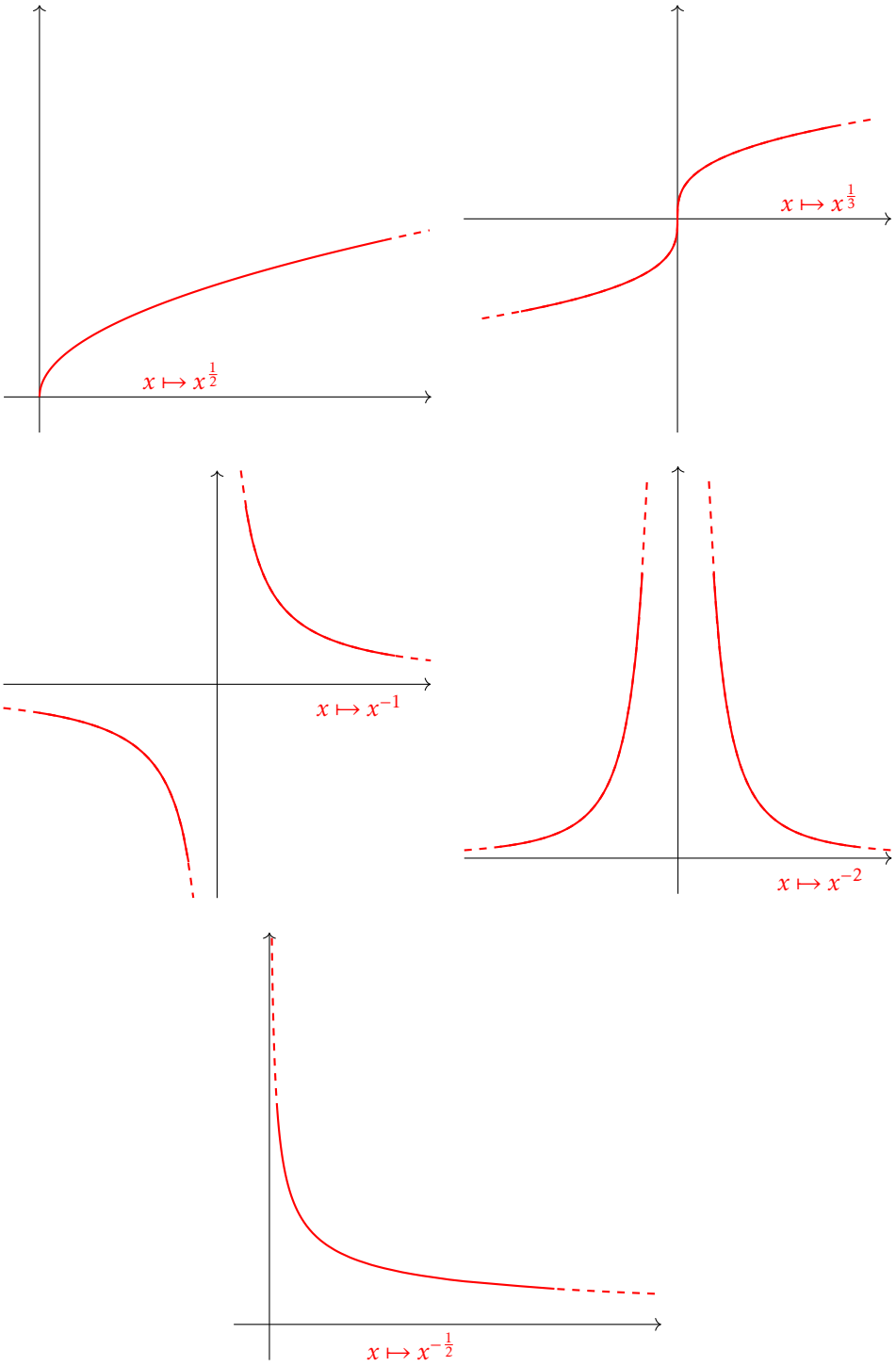
— la funzione radice quadrata $x \mapsto x^{\frac{1}{2}}$,

— la funzione inverso $x \mapsto x^{-1}$,

— ...

Esempi





6.1.1 Alcune funzioni ottenibili dalle funzioni potenza

Funzioni polinomiali e razionali Una **funzione polinomiale** è una funzione p della forma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \,\mathrm{id}^k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n,$$

dove $a_n \neq 0$. Il numero n è detto **grado** di p.

Se $p, q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono funzioni polinomiali, allora la funzione

$$\frac{p}{q} \colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

è detta **funzione razionale**.

Funzioni lineari Una **funzione lineare** è una funzione f della forma

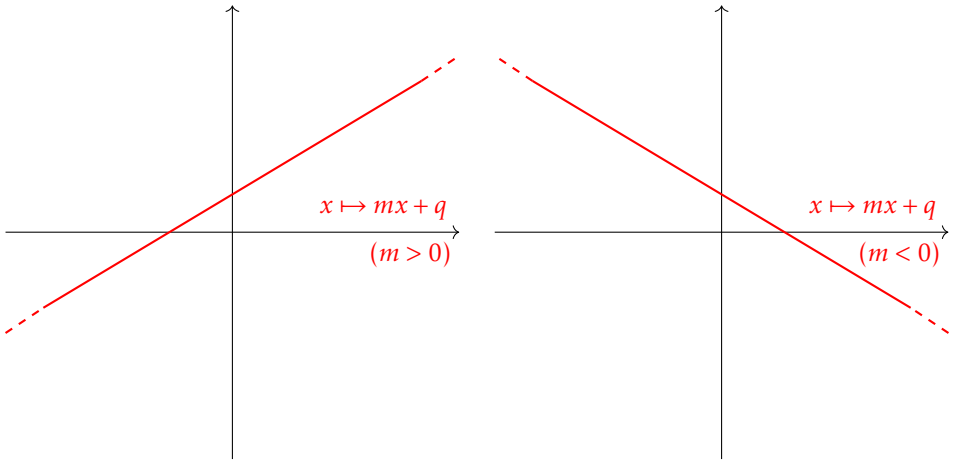
$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto m \cdot x + q,$$

dove m (detto **coefficiente angolare**) e q (detto **intercetta**) sono valori reali fissati.

In altre parole, le funzioni lineari sono le funzioni polinomiali di grado 1.

Tutte le funzioni costanti e la funzione identità sono funzioni lineari.

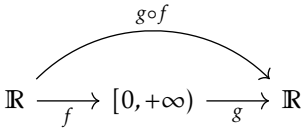
Esempi



La funzione valore assoluto Consideriamo

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2,$$
$$g \colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}.$$

Osserviamo che $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$, quindi abbiamo la composizione:



dove $g \circ f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$.

6.2 Funzioni esponenziali e logaritmiche

6.2.1 La funzione esponenziale

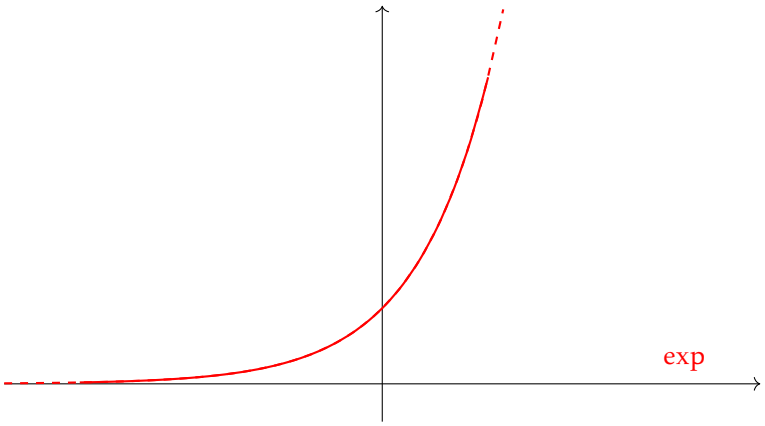
Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora la **serie esponenziale**

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

converge.

La **funzione esponenziale** è la funzione $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x)$.
Il **numero di Eulero** (noto anche come **numero di Nepero**) è definito come:

$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots \approx 2.71828$$



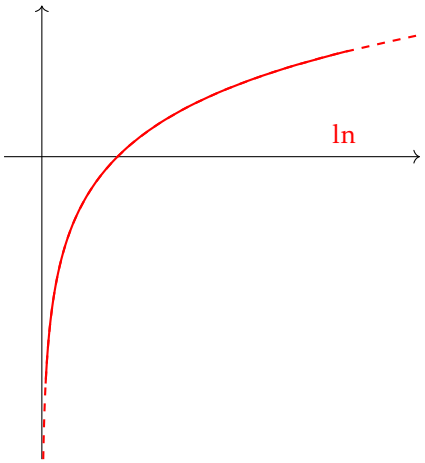
Proprietà della funzione esponenziale

1. **Positività**:
$$\forall x \quad \exp(x) > 0,$$
2. **Additività** (o **proprietà moltiplicativa**):
$$\forall x \forall y \quad \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y),$$
3. **Proprietà dell'inverso** (o **della reciprocità**):
$$\forall x \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

Osservazione Per ogni numero intero $k \in \mathbb{Z}$, si ha $\exp(n) = e^n$. Questo è il motivo per cui la funzione è detta "esponenziale". Per lo stesso motivo, spesso utilizziamo e^x al posto di $\exp(x)$ anche per un qualsiasi esponente reale $x \in \mathbb{R}$.

6.2.2 Il logaritmo naturale

Esiste una funzione $\ln\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $\ln y = x$ se e solo se $e^x = y$. Tale funzione è detta **logaritmo naturale**.



6.2.3 Esponenziali e logaritmi con base non naturale

Sia $b \in (0, +\infty)$. Scriviamo

$$b^x = \exp(\ln(b) \cdot x), \qquad \log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}.$$

1. La funzione **esponenziale di base** b è la funzione

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto b^x.$$

2. La funzione **logaritmo in base** b è la funzione

$$(0, +\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \log_b(x).$$

Le proprietà delle potenze Possiamo estendere le proprietà delle potenze al caso dell'esponente reale in tutti i casi in cui le espressioni hanno significato:

1. **Prodotto di potenze con la stessa base**:
$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$
2. **Quoziente di potenze con la stessa base**:
$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$
3. **Potenza di una potenza**:
$$a^{x \cdot y} = (a^x)^y$$
4. **Potenza di un prodotto**:
$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$
5. **Potenza di un quoziente**:
$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$
6. **Potenza con esponente zero**:
$$a^0 = 1$$

Le proprietà dei logaritmi Valgono le seguenti proprietà nei casi in cui le espressioni hanno significato:

1. **Logaritmo del prodotto**:
$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$$
2. **Logaritmo del quoziente**:
$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$$
3. **Logaritmo della potenza**:
$$\log_b(x^a) = a \cdot \log_b(x)$$
4. **Logaritmo di una radice**:
$$\log_b\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}\log_b(x)$$
5. **Logaritmo dell'inverso**:
$$\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_b(x)$$

6. **Cambio di base:**
$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

7. **Logaritmo di 1:**
$$\log_a(1) = 0$$

8. **Logaritmo della base:**
$$\log_a(a) = 1$$

6.3 Funzioni trigonometriche e trigonometriche inverse

6.3.1 Le funzioni trigonometriche

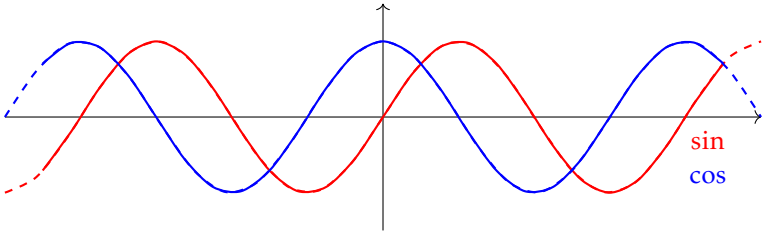
Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \qquad \text{(serie seno)}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \qquad \text{(serie coseno)}$$

convergono.

La **funzione seno** è la funzione $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$.
La **funzione coseno** è la funzione $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)$.



La funzione **tangente** è definita come:

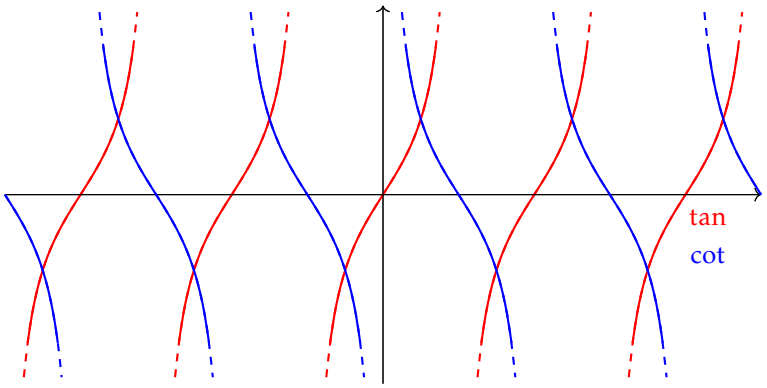
$$\tan\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)},$$

dove $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\}$.

La funzione **cotangente** è definita come:

$$\cot\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)},$$

dove $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\}$.



La funzione **secante** è definita come:

$$\sec\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\cos(x)},$$

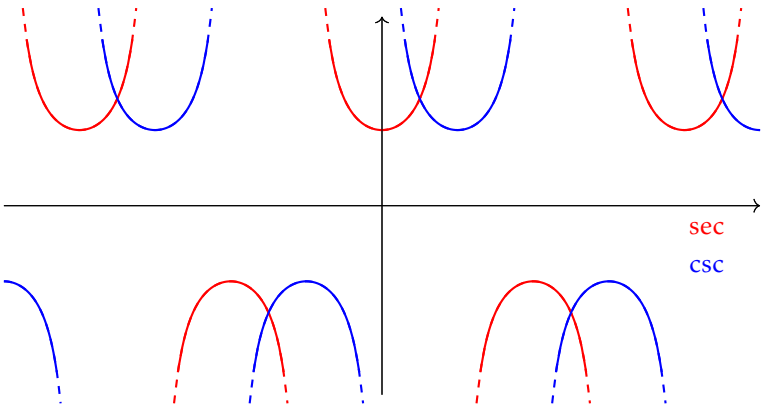
dove $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\}$.

La funzione **cosecante** è definita come:

$$\csc\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sin(x)},$$

dove $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\}$.

Le funzioni $\sin, \cos, \tan, \cot, \sec, \csc$ sono dette **funzioni trigonometriche**.



6.3.2 Proprietà delle funzioni trigonometriche

Nota: Tutte le proprietà elencate sono valide dove le funzioni sono definite.

Parità e disparità

1. **Seno: funzione dispari:**
$$\sin(-x) = -\sin x$$
2. **Coseno: funzione pari:**
$$\cos(-x) = \cos x$$
3. **Tangente: funzione dispari:**
$$\tan(-x) = -\tan x$$
4. **Cotangente: funzione dispari:**
$$\cot(-x) = -\cot x$$
5. **Secante: funzione pari:**
$$\sec(-x) = \sec x$$
6. **Cosecante: funzione dispari:**
$$\csc(-x) = -\csc x$$

Periodicità

1. **Periodicità del seno e del coseno:**
$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \text{e} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$
2. **Periodicità della tangente e della cotangente:**
$$\tan(x + \pi) = \tan x \quad \text{e} \quad \cot(x + \pi) = \cot x$$
3. **Periodicità della secante e della cosecante:**
$$\sec(x + 2\pi) = \sec x \quad \text{e} \quad \csc(x + 2\pi) = \csc x$$

Relazioni fondamentali

1. **Relazione pitagorica:**

$$\begin{aligned} \sin^2 x &+ \cos^2 x &&= 1 \\ \tan^2 x &+ 1 &&= \sec^2 x \\ 1 &+ \cot^2 x &&= \csc^2 x \end{aligned}$$

2. **Espressione della tangente e della cotangente:**

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{e} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

3. **Espressioni della secante e della cosecante:**

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{e} \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

Formule di addizione e sottrazione

1. **Seno della somma e della differenza:**

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \text{e} \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

2. **Coseno della somma e della differenza:**

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \text{e} \quad \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

3. **Tangente della somma e della differenza:**

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \quad \text{e} \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

4. **Cotangente della somma e della differenza:**

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x} \quad \text{e} \quad \cot(x-y) = \frac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$$

5. **Secante della somma e della differenza:**

$$\sec(x+y) = \frac{\sec x \sec y \csc x \csc y}{\csc x \csc y - \sec x \sec y} \quad \text{e} \quad \sec(x-y) = \frac{\sec x \sec y \csc x \csc y}{\csc x \csc y + \sec x \sec y}$$

6. **Cosecante della somma e della differenza:**

$$\csc(x+y) = \frac{\csc x \sec y \sec x \csc y}{\sec x \csc y + \csc x \sec y} \quad \text{e} \quad \csc(x-y) = \frac{\csc x \sec y \sec x \csc y}{\sec x \csc y - \csc x \sec y}$$

Formule di duplicazione

1. **Seno del doppio angolo:**

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

2. **Coseno del doppio angolo:**

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x \end{aligned}$$

3. Tangente del doppio angolo:
$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$
4. Cotangente del doppio angolo:
$$\cot(2x) = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}$$
5. Secante del doppio angolo:
$$\sec(2x) = \frac{\sec^2 x \, \csc^2 x}{\csc^2 x - \sec^2 x}$$
6. Cosecante del doppio angolo:
$$\csc(2x) = \frac{1}{2}\sec x \, \csc x$$

Formule di bisezione Nota: In queste formule, il segno non viene esplicitato, ma viene assegnato attraverso "valutazioni esterne".

1. Seno del mezzo angolo:
$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
2. Coseno del mezzo angolo:
$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$
3. Tangente del mezzo angolo:
$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$
4. Cotangente del mezzo angolo:
$$\cot\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$$
5. Secante del mezzo angolo:
$$\sec\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{2}{1+\cos x}}$$
6. Cosecante del mezzo angolo:
$$\csc\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{2}{1-\cos x}}$$

Formule di riduzione

1. Seno e coseno degli angoli complementari:
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x \quad \text{e} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$$
2. Tangente e cotangente degli angoli complementari:
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cot x \quad \text{e} \quad \cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \tan x$$
3. Secante e cosecante degli angoli complementari:
$$\sec\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \csc x \quad \text{e} \quad \csc\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sec x$$

Formule di prostaferesi

1. **Formule di prostaferesi per il seno:**

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad \text{e} \quad \sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

2. **Formule di prostaferesi per il coseno:**

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad \text{e} \quad \cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

3. **Formule di prostaferesi per la tangente:**

$$\tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} \quad \text{e} \quad \tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$$

4. **Formule di prostaferesi per la cotangente:**

$$\cot x + \cot y = \frac{\sin(y+x)}{\sin x \sin y} \quad \text{e} \quad \cot x - \cot y = \frac{\sin(y-x)}{\sin x \sin y}$$

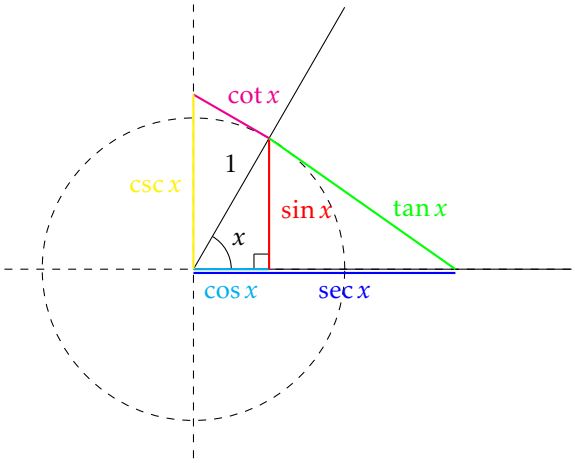
5. **Formule di prostaferesi per la secante:**

$$\sec x + \sec y = 2\frac{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\cos x \cos y} \quad \text{e} \quad \sec x - \sec y = 2\frac{\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\cos x \cos y}$$

6. **Formule di prostaferesi per la cosecante:**

$$\csc x + \csc y = 2\frac{\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\sin x \sin y} \quad \text{e} \quad \csc x - \csc y = -2\frac{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\sin x \sin y}$$

Interpretazione geometrica delle funzioni trigonometriche Sia x l'ampiezza di un angolo espressa in radianti (angolo piatto = π). Allora:



Alcuni valori delle funzioni trigonometriche

Angolo	sin	cos	tan	cot	sec	csc
0	0	1	0	n.d.	1	n.d.
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	n.d.	0	n.d.	1

6.3.3 Le funzioni trigonometriche inverse

In intervalli opportuni, tutte le funzioni trigonometriche sono invertibili. Possiamo quindi definire le seguenti funzioni trigonometriche inverse:

— la funzione **arcoseno** $\arcsin\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ tale che $\arcsin(y) = x$ se e solo se $\sin(x) = y$,

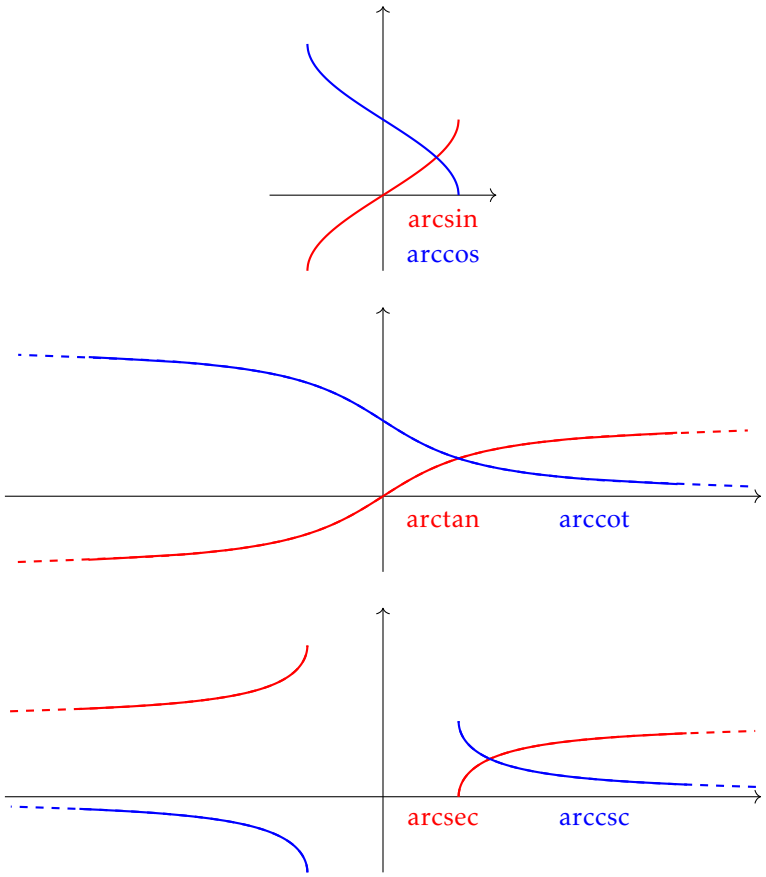
— la funzione **arcocoseno** $\arccos\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ tale che $\arccos(y) = x$ se e solo se $\cos(x) = y$,

— la funzione **arcotangente** $\arctan\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\arctan(y) = x$ se e solo se $\tan(x) = y$,

— la funzione **arcocotangente** $\operatorname{arccot}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\operatorname{arccot}(y) = x$ se e solo se $\cot(x) = y$,

— la funzione **arcosecante** $\operatorname{arcsec}\colon (-\infty,-1]\cup[1,+\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $\operatorname{arcsec}(y) = x$ se e solo se $\sec(x) = y$,

— la funzione **arcocosecante** $\operatorname{arccsc}\colon (-\infty,-1]\cup[1,+\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $\operatorname{arccsc}(y) = x$ se e solo se $\csc(x) = y$.



Esercizi

Esercizio 6.1. Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Dimostrare che:

1. $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.
2. $\exp(x) > 0$.
3. $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Esercizio 6.2. Dimostrare che:

1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Se $a < b$, allora $\exp(a) < \exp(b)$.
2. $\mathrm{Im}(\exp) = (0, +\infty)$.
3. exp è iniettiva.
4. Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Se $\exp(a) < \exp(b)$, allora $a < b$.

Esercizio 6.3. Dimostrare che:

1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Se $a < b$, allora $\ln(a) < \ln(b)$.
2. $\mathrm{Im}(\ln) = \mathbb{R}$.
3. ln è iniettiva.
4. ln è biiettiva.
5. Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Allora: $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$.

7 Continuità e limiti di funzioni

Intorni

— Sia $x \in \mathbb{R}$. Diciamo che l'insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ è un **intorno** di x se esiste $r > 0$ tale che

$$B_x(r) \subseteq D.$$

— Diciamo che l'insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ è un **intorno** di $+\infty$ se esiste $r \in \mathbb{R}$ tale che

$$(r, +\infty) \subseteq D.$$

— Diciamo che l'insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ è un **intorno** di $-\infty$ se esiste $r \in \mathbb{R}$ tale che

$$(-\infty, r) \subseteq D.$$

Limiti e continuità Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia D un intorno di c. Sia $f : D \to \mathbb{R}$.

— Sia $\ell \in \mathbb{R}$. Se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \quad x \in B_c(\delta) \setminus \{c\} \to f(x) \in B_\ell(\varepsilon),$$

allora diciamo che ℓ è il **limite** di f in c e scriviamo

$$\lim_{x \to c} f(x) = \ell.$$

Se

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c),$$

allora diciamo che f è **continua** in c. Se f è continua in tutti i punti di D, allora diciamo che f è continua, in caso contrario è **discontinua**.

— Se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \quad x \in (c - \delta, c) \to f(x) \in B_\ell(\varepsilon),$$

allora diciamo che ℓ è il **limite sinistro** di f in c e scriviamo

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \ell.$$

— Se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \quad x \in (c, c + \delta) \to f(x) \in B_\ell(\varepsilon),$$

allora diciamo che ℓ è il **limite destro** di f in c e scriviamo

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \ell.$$

Esempio Consideriamo la funzione pavimento $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \lfloor x \rfloor$. Osserviamo:

1. $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \lfloor x \rfloor = 0$.

   Infatti, sia $\varepsilon > 0$. Scegliamo $\delta = \frac{1}{2}$. Abbiamo

   $$B_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} = \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right),$$

   quindi se $x \in B_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)$ abbiamo $f(x) = \lfloor x \rfloor = 0 \in B_0(\varepsilon)$.

   Poiché $\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0$, concludiamo che f è continua in $\frac{1}{2}$.

2. $\lim_{x \to 0^-} \lfloor x \rfloor = -1$.

   Infatti, sia $\varepsilon > 0$. Scegliamo $\delta = 1$. Da $x \in (-1, 0)$ segue $\lfloor x \rfloor = -1 \in B_{-1}(\varepsilon)$.

3. $\lim_{x \to 0^+} \lfloor x \rfloor = 0$.

   Infatti, sia $\varepsilon > 0$. Scegliamo $\delta = 1$. Da $x \in (0, 1)$ segue $\lfloor x \rfloor = 0 \in B_0(\varepsilon)$.

4. Poiché $\lim_{x \to 0^-} \lfloor x \rfloor \neq \lim_{x \to 0^+} \lfloor x \rfloor$, concludiamo che non esiste il limite di f in 0 e, di conseguenza, f non è continua in 0.

Limiti infiniti Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia D un intorno di c. Sia $f : D \to \mathbb{R}$.

— Se

$$\forall R > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \quad x \in B_c(\delta) \setminus \{c\} \to f(x) > R,$$

allora diciamo che $+\infty$ è il **limite** di f in c e scriviamo

$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty.$$

— Se

$$\forall R > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \quad x \in B_c(\delta) \setminus \{c\} \to f(x) < -R,$$

allora diciamo che $-\infty$ è il **limite** di f in c e scriviamo

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty.$$

— Se

$$\forall R > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \quad x \in (c - \delta, c) \to f(x) > R,$$

allora diciamo che $+\infty$ è il **limite sinistro** di f in c e scriviamo

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty.$$

— Se

$$\forall R > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \quad x \in (c, c + \delta) \to f(x) > R,$$

allora diciamo che $+\infty$ è il **limite destro** di f in c e scriviamo

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = +\infty.$$

— Se

$$\forall R > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \quad x \in (c - \delta, c) \to f(x) < -R,$$

allora diciamo che $-\infty$ è il **limite sinistro** di f in c e scriviamo

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty.$$

— Se

$$\forall R > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \quad x \in (c, c + \delta) \to f(x) < -R,$$

allora diciamo che $-\infty$ è il **limite destro** di f in c e scriviamo

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty.$$

Limiti a + infinito Sia D un intorno di $+\infty$, e sia $f\colon D \to \mathbb{R}$.

— Sia $\ell \in \mathbb{R}$. Se
$$\forall \varepsilon > 0 \exists R > 0 \forall x \quad x > R \to f(x) \in B_\ell(\varepsilon),$$
allora diciamo che ℓ è il **limite** di f in $+\infty$ e scriviamo
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

— Se
$$\forall S > 0 \exists R > 0 \forall x \quad x > R \to f(x) > S,$$
allora diciamo che $+\infty$ è il **limite** di f in $+\infty$ e scriviamo
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

— Se
$$\forall S > 0 \exists R > 0 \forall x \quad x > R \to f(x) < -S,$$
allora diciamo che $-\infty$ è il **limite** di f in $+\infty$ e scriviamo
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

Limiti a − infinito Sia D un intorno di $-\infty$, e sia $f\colon D \to \mathbb{R}$.

— Sia $\ell \in \mathbb{R}$. Se
$$\forall \varepsilon > 0 \exists R > 0 \forall x \quad x < -R \to f(x) \in B_\ell(\varepsilon),$$
allora diciamo che ℓ è il **limite** di f in $-\infty$ e scriviamo
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell.$$

— Se
$$\forall S > 0 \exists R > 0 \forall x \quad x < -R \to f(x) > S,$$
allora diciamo che $+\infty$ è il **limite** di f in $-\infty$ e scriviamo
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

— Se
$$\forall S > 0 \exists R > 0 \forall x \quad x < -R \to f(x) < -S,$$
allora diciamo che $-\infty$ è il **limite** di f in $-\infty$ e scriviamo
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Proprietà dei limiti Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia D un intorno di c. Siano $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora valgono le seguenti proprietà (ovunque le espressioni abbiano significato):

1. **Limite della somma**:
$$\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to c}(f(x)) + \lim_{x\to c}(g(x))$$

2. **Limite del prodotto per una costante**:
$$\lim_{x\to c}(\lambda f(x)) = \lambda \cdot \lim_{x\to c}(f(x))$$

3. **Limite del prodotto di due funzioni**:
$$\lim_{x\to c}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to c}(f(x)) \cdot \lim_{x\to c}(g(x))$$

4. **Limite del quoziente di due funzioni**: Se $\lim_{x\to c}(g(x)) \neq 0$, allora

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to c}(f(x))}{\lim\limits_{x\to c}(g(x))}$$

5. **Limite di una funzione costante**:

$$\lim_{x\to c}\lambda = \lambda$$

6. **Limite della funzione identità**:

$$\lim_{x\to c} x = c$$

7. **Limite di una funzione continua**: Se f è continua in c, allora

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

Proprietà analoghe valgono anche per i limiti destri, sinistri e all'infinito. Con qualche accorgimento, proprietà analoghe valgono **quasi sempre** anche per i limiti infiniti.

Proprietà di chiusura della continuità Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia D un intorno di c. Siano $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

— Se f e g sono continue in c, allora:

1. $f + g$ è continua in c,
2. λf è continua in c,
3. $f \cdot g$ è continua in c,
4. Se, inoltre, $g(x) \neq 0$ in un intorno di c, allora anche $\frac{f}{g}$ è continua in c.

— Se f e g sono continue, allora:

1. $f + g$ è continua,
2. λf è continua,
3. $f \cdot g$ è continua,
4. Se f e g sono continue in D^* (dove $(g(x) \neq 0$ in $D^*)$), allora anche $\frac{f}{g}$ è continua.

Proprietà della composizione delle funzioni continue Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia D un intorno di c. Siano $f\colon D \to \mathbb{R}$ e $g\colon E \to \mathbb{R}$ tali che $\mathrm{Im}(f) \subseteq E$.

1. Se f è continua in c e g è continua in $f(c)$, allora la funzione $g \circ f$ è continua in c.
2. Se f è continua e g è continua, allora la funzione $f \circ g$ è continua.

Proprietà dell'inversa di una funzione continua Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia D un intorno di c. Siano $f\colon D \to \mathbb{R}$ e $g\colon E \to \mathbb{R}$ tali che $g \circ f = \mathrm{id}$.

1. Se f è continua in c, allora g è continua in $f(c)$.
2. Se f è continua, allora g è continua.

Continuità delle funzioni elementari Tutte le funzioni elementari sono continue nel loro dominio.

Teorema dei due carabinieri Sia $c \in \mathbb{R}$ e siano f, g, h tre funzioni definite in un intorno di c, eccetto eventualmente in c stesso, tali che:

— $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ per ogni x in un intorno di c (con $x \neq c$),

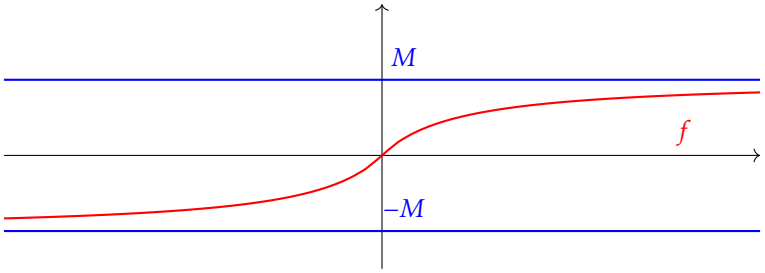
— $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = \ell$.

Allora:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \ell.$$

Funzioni limitate Una funzione reale di variabile reale $f : D \to \mathbb{R}$ è detta **limitata** se

$$\exists M > 0 \, \forall x \in D \quad (|f(x)| \leqslant M).$$



Teorema di Weierstrass Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$, e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$. Allora esistono $c, d \in [a, b]$ tali che

$$\forall x \in [a, b] \quad (f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d)).$$

c è detto **punto di massimo** di f, mentre d è detto **punto di minimo** di f.

Teorema dei valori intermedi / Teorema di Bolzano Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$, e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$. Allora:

— Se $f(a)$ e $f(b)$ hanno segni discordi, allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

— Se $f(a) < f(b)$ ed esiste $d \in (f(a), f(b))$, allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = d$.

— Se $f(b) < f(a)$ ed esiste $d \in (f(b), f(a))$, allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = d$.

7.1 Limiti notevoli

Con il termine **limiti notevoli** si fa riferimento a determinati limiti il cui valore è noto, ma che generalmente non possono essere calcolati direttamente utilizzando le proprietà lineari dei limiti.[1] Tra questi, troviamo:

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$

   Infatti, ricordiamo che

   $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

   e, di conseguenza:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots \right) = 1.$$

[1] **Nota bene:** Anche in questo caso non si tratta di una definizione rigorosa, perciò l'elenco può variare a seconda della fonte consultata.

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Infatti, ricordiamo che

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

e, di conseguenza:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \cdots\right) = 1.$$

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0.$

Infatti, ricordiamo che

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

e, di conseguenza:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!} + \frac{x^5}{6!} - \frac{x^7}{8!} + \cdots\right) = 0.$$

Esercizi

Esercizio 7.1. Dire se f è continua in 0, nel suo dominio, ovunque, nei seguenti casi:

1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$.
2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$.
3. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.
4. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$.
5. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{sgn} x$.
6. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$.
7. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos x$.
8. $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \tan x$, con $\mathbb{R}^*$ opportuno.
9. $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \cot x$, con $\mathbb{R}^*$ opportuno.
10. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \lfloor x \rfloor$.
11. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \lceil x \rceil$.
12. $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$.
13. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$.
    Suggerimento: Osservare che $|x| = \sqrt{x^2}$.
14. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{2\cos^2 x + 4\exp x}$
15. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
16. $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$.
17. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 1, \\ 2 & \text{se } x = 1. \end{cases}$
18. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$
19. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$
20. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{se } x = \dfrac{p}{q} \text{ in forma ridotta}, \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$
21. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$
22. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ per $x \neq 0$, e $f(0) = 0$.
23. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \max\{x, 0\}$.
24. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \min\{x^2, 1\}$.
25. $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.
26. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \sin x & \text{se } x \neq \pi, \\ 10 & \text{se } x = \pi. \end{cases}$
27. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & x \geq 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$
28. $f\colon (0,1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{1 - x}$.
29. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$
30. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^3 & x < 1, \\ 2 & x = 1, \\ x + 1 & x > 1. \end{cases}$
31. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{|x|}$.
32. $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2}$.
33. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \neq 0, \\ 100 & x = 0. \end{cases}$
34. $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x^2 + 1)$.

Esercizio 7.2. Vero o falso? Motivare.

1. Sia $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione polinomiale di grado pari. Allora esiste sempre $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(c) = 0$.
2. Sia $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione polinomiale di grado dispari. Allora esiste sempre $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(c) = 0$.
3. Una funzione polinomiale $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di grado pari soddisfa $\forall x\, p(x) \geqslant 0$.
4. Sia $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione polinomiale di grado n con coefficiente dominante a_n positivo. Allora $\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$.
5. Esiste una funzione polinomiale $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non costante limitata su $\mathbb{R}$.

Esercizio 7.3. Trovare un esempio di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nei seguenti casi:

1. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
3. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
4. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$.
5. $\lim_{x\to0^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.
6. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$.
7. Esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ma non esiste $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
8. Esiste $\lim_{x\to0} f(x)$ ma non esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
9. f è continua nel suo dominio ma è discontinua in 0.
10. f è continua in 0 ma non è continua nel suo dominio.
11. f è continua nel suo dominio ma non è continua ovunque.
12. f è continua ovunque tranne che in 0.
13. f è continua ovunque tranne che in un numero infinito di punti.
14. f è discontinua in ogni punto di $\mathbb{R}$.
15. f è periodica e non ha limite per $x \to \pm\infty$.
16. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ma f non è limitata.
17. f è limitata ma non ha limite per $x \to +\infty$.
18. f è limitata ma non ha limite per $x \to 0$.
19. f è crescente e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
20. f è decrescente nell'intervallo $(-\infty, 0)$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.
21. f è crescente nell'intervallo $(-\infty, 0)$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$.

Esercizio 7.4. Dire se i seguenti limiti esistono e, in caso affermativo, calcolarli:

1. $\lim_{x\to+\infty} 5x^3 - 9x + 11$.
2. $\lim_{x\to-\infty} 5x^3 - 9x + 11$.
3. $\lim_{x\to+\infty} -3x^3 + 9x^5 + 12$.
4. $\lim_{x\to-\infty} -7x^9 + 8x^{2024} - 2025$.
5. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+5}{3x}$.
6. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x+5}{3x}$.
7. $\lim_{x\to5^-} \dfrac{1}{x-5}$.
8. $\lim_{x\to5^+} \dfrac{1}{x-5}$.
9. $\lim_{x\to\pm5^\pm} \dfrac{9x}{25-x^2}$.
10. $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{9x}{25-x^2}$.
11. $\lim_{x\to1^\pm} \left(\dfrac{2x-1}{x+3} - \dfrac{x^3-2}{x^2-2x+1} \right)$.
12. $\lim_{x\to0} (e^x - 1)$.
13. $\lim_{x\to-\infty} e^{2x}$.
14. $\lim_{x\to+\infty} (2e^x + 1)$.
15. $\lim_{x\to+\infty} \sin(x)$.
16. $\lim_{x\to-\infty} \sin(x)$.
17. $\lim_{x\to0^+} \dfrac{7}{\ln(x)}$.
18. $\lim_{x\to0} \dfrac{1}{\sin(x)}$.
19. $\lim_{x\to0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.
20. $\lim_{x\to0} \dfrac{x}{\sin(x)}$.
21. $\lim_{x\to0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x^2}$.
22. $\lim_{x\to1} \dfrac{\arccos^2 x}{x-1}$.
23. $\lim_{x\to0} \dfrac{\cos(x)}{x}$.
24. $\lim_{x\to0} \dfrac{2^x - 1}{x}$.

25. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log_{10}(1+x)}{x}$.

26. $\lim_{x\to 0} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$.

27. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3x}-x}{1}$.

28. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

29. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x}$.

30. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{x^2}$.

31. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x-\frac{x^2}{2}}{x^4}$.

32. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x-x}{x^3}$.

33. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}$.

34. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3}$.

35. $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$.

36. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(5x)}$.

37. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$.

38. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x}$.

39. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

40. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$.

41. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(1/x)}{x}$.

42. $\lim_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$.

43. $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$.

44. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^x-1}{x-1}$.

45. $\lim_{x\to\pi/2^-} \tan x$.

46. $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x$.

47. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\exp(x)-\cos x-x}{x^2}$.

48. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+2x)^{1/x}}{e^2}$.

49. $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}$, $a,b\in\mathbb{R}$ fissati.

50. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ fissato.

51. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^p}$, $p>0$ fissato.

52. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{a^x}$, $a>1$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Ulteriori esercizi sui limiti

Esercizio 7.5. Calcolare:

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$.

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$.

4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x}$.

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(\sin 5x)(\sin 6x)}{x\sin 2x}$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{(\sin 5x)(\sin 6x)}{x\sin 2x}$.

6. $\lim_{x\to 3} \dfrac{3x^2+2x-33}{x^2-x-6}$.

7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{\ln(1+\sin 3x)}$.

8. $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$.

9. $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

10. $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

11. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

12. $\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x^2}$.

13. $\lim_{x\to-\infty} x^2 e^x$.

14. $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$.

15. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

16. $\lim_{x\to 1^-} (\ln x)(\ln(1-x))$.

8 Derivate

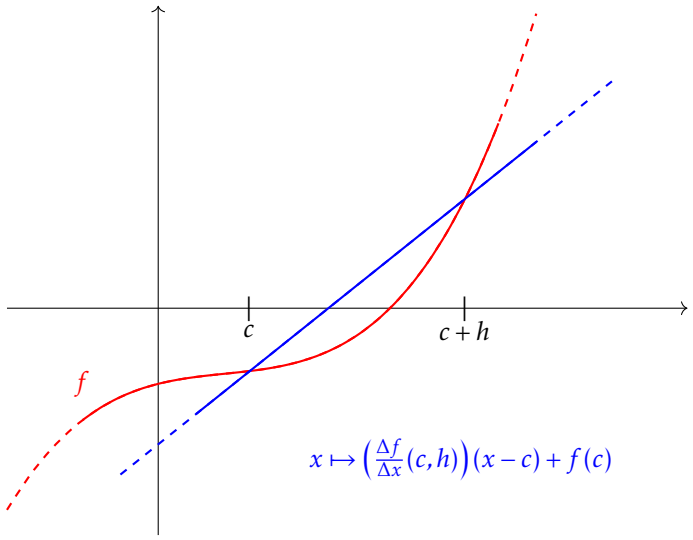
Rapporto incrementale In matematica, per rappresentare una variazione di una quantità finita si usa spesso il simbolo Δ, che indica una differenza tra due valori. Ad esempio, il **rapporto incrementale** è dato da:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(c,h) = \frac{f(c+h)-f(c)}{(c+h)-c} = \frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$

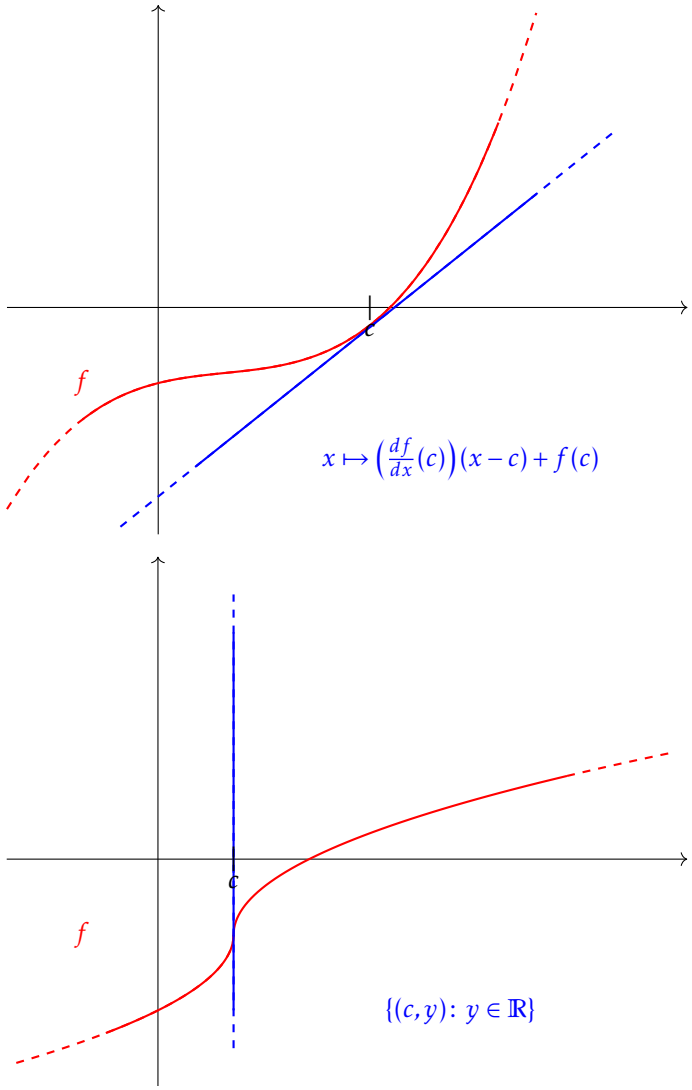
La d (o, in alcuni contesti, la ∂ per funzioni di più variabili) denota invece una variazione infinitesima. Questo si formalizza prendendo il limite del rapporto incrementale per h che tende a zero, ottenendo così la derivata:

$$\frac{df}{dx}(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$

Significato geometrico: la retta secante



Significato geometrico: la retta tangente



Derivata Siano $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ e $c \in D$. Si dice che f è **differenziabile** (o **derivabile**) in c se esiste

$$\frac{df}{dx}(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Il valore $\frac{df}{dx}(c)$ è chiamato **derivata** di f in c. La funzione f è detta **differenziabile** se è differenziabile in ogni punto di D.

La funzione

$$f'\colon D^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{df}{dx}(x),$$

dove $D^* = \{x \in D\colon f \text{ è differenziabile in x}\}$, è la **funzione derivata** di f.

Derivata n-esima Con la scrittura $f^{(n)}$ indichiamo la **derivata n-esima** di f, ovvero:

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= f \\ f^{(1)} &= f' \\ f^{(2)} &= f'' \\ &\vdots \\ f^{(n+1)} &= (f^{(n)})'. \end{aligned}$$

Esempi

1. $\frac{d\hat{k}}{dx}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\hat{k}(x+h)-\hat{k}(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$
2. $\frac{d\,\mathrm{id}}{dx}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{id}(x+h)-\mathrm{id}(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1.$
3. $\frac{d}{dx}\lambda x = \lim_{h\to 0} \frac{\lambda(x+h)-\lambda x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\lambda h}{h} = \lambda.$
4. $\frac{d}{dx}|x| = \mathrm{sgn}(x)$

   Attenzione: il dominio di $\frac{d}{dx}|x|$ è $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
5. $\frac{d}{dx}x^2 = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.$
6. $\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x-(x+h)}{hx(x+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$
7. $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
8. In generale, vedremo più avanti che
   $$\frac{d}{dx}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$
   per ogni $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
9. $\frac{d}{dx}e^x = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{(e^h-1)}{h} = e^x$
10. $\frac{d}{dx}\sin(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} = \sin(x)\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = \cos(x).$
11. $\frac{d}{dx}\cos(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h} = \cos(x)\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = -\sin(x).$

Osservazioni

1. Se $f\colon D\to\mathbb{R}$ è differenziabile in $c\in D$, allora f è continua in c.
2. Se $f,g\colon D\to\mathbb{R}$ sono differenziabili e $f'=g'$, allora $f=g+\hat{k}$ per qualche k.

Proprietà Siano $f,g\colon D\to\mathbb{R}$ differenziabili in $c\in D$ e sia $\lambda\in\mathbb{R}$. Allora le funzioni $f+g, \lambda f, f\cdot g$ sono differenziabili in c. Se $g(x)\neq 0$ per ogni x in un intorno di c, allora anche la funzione $\frac{f}{g}$ è differenziabile in c.

Inoltre:

1. $(f+g)' = f'+g'$,
2. $(\lambda f)' = \lambda f'$,
3. $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$.
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g\cdot g}$.

Esempi

1. $\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{d}{dx}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x).$
2. $\frac{d}{dx}\cot(x) = \frac{d}{dx}\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\cos'(x)\sin(x) - \cos(x)\sin'(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -\csc^2(x).$
3. $\frac{d}{dx}\sec(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{\cos(x)} = \frac{-\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} = \tan(x)\sec(x).$
4. $\frac{d}{dx}\csc(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{\sin(x)} = \frac{-\sin'(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)} = -\cot(x)\csc(x).$

Derivata dell'inversa Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$, sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ continua e strettamente monotona, e sia $g\colon \mathrm{Im}(f) \to (a,b)$ tale che $g \circ f = \mathrm{id}$:

$$(a,b) \xrightarrow[f]{} \mathrm{Im}(f) \xrightarrow[g]{} (a,b), \qquad (a,b) \xrightarrow{g\circ f} (a,b).$$

Se f è differenziabile in $c \in (a,b)$ e $f'(c) \neq 0$, allora g è differenziabile in $d = f(c)$, e

$$g' = \frac{1}{f' \circ g}.$$

Esempi

1. Ricordiamo che $\ln \circ \exp = \mathrm{id}$. Allora:

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{\exp' \circ \ln(x)} = \frac{1}{\exp \circ (x)} = \frac{1}{x}.$$

   Di conseguenza, se $b \in (0, +\infty)$, abbiamo:

$$\frac{d}{dx}\log_b(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{\ln(b)}\ln(x) = \frac{1}{\ln(b)}\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x\ln(b)}.$$

2. Ricordiamo che $\arcsin \circ \sin = \mathrm{id}$. Allora:

$$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sin' \circ \arcsin(x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

   Per semplificare l'espressione, utilizziamo il fatto che $\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1$ e dunque $\cos(y) = \sqrt{1 - \sin^2(y)}$:

$$\frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. Ricordiamo che $\arccos \circ \cos = \mathrm{id}$. Allora:

$$\frac{d}{dx}\arccos(x) = \frac{1}{\cos' \circ \arccos(x)} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))}.$$

   Per semplificare l'espressione, utilizziamo il fatto che $\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1$ e dunque $\sin(y) = \sqrt{1 - \cos^2(y)}$:

$$\frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

4. Ricordiamo che $\arctan \circ \tan = \mathrm{id}$. Allora:

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{\tan' \circ \arctan(x)} = \frac{1}{\sec^2(\arctan(x))}.$$

Per semplificare l'espressione, utilizziamo il fatto che $\sec^2(y) = 1 + \tan^2(y)$:

$$\frac{1}{\sec^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

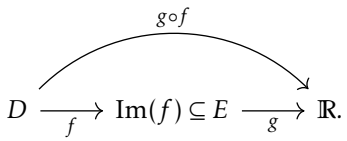
5. Ricordiamo che $\operatorname{arccsc} \circ \csc = \mathrm{id}$. Allora:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\operatorname{arccsc}(x) &= \frac{1}{\csc' \circ \operatorname{arccsc}(x)} = \frac{1}{-\cot(\operatorname{arccsc}(x))\csc(\operatorname{arccsc}(x))} \\ &= \frac{1}{-x\cot(\operatorname{arccsc}(x))}.\end{aligned}$$

Per semplificare l'espressione, utilizziamo il fatto che $\csc^2(y) = 1 + \cot^2(y)$ e dunque $\cot(y) = \sqrt{\csc^2(y) - 1}$:

$$\frac{1}{-x\cot(\operatorname{arccsc}(x))} = \frac{1}{-x\sqrt{\csc^2(\operatorname{arccsc}(x)) - 1}} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Regola della Catena Siano $f\colon D \to \mathbb{R}$ e $g\colon E \to \mathbb{R}$ tali che $\mathrm{Im}(f) \subseteq E$.



Se f è differenziabile in $c \in D$ e g è differenziabile in $f(c)$, allora $g \circ f$ è differenziabile in c, e

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'.$$

Esempi

1. Sia $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $\mathbb{R}$, allora: $\dfrac{d}{dx}g(3x+2) = 3g'(3x+2)$.

2. $\dfrac{d}{dx}(\sin(x))^2 = 2\sin(x)\cos(x)$.

3. $\dfrac{d}{dx}(\cos(x))^2 = -2\cos(x)\sin(x)$.

4. Sia $a \in (0, +\infty)$, allora:

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln(a)} = e^{x\ln(a)}\ln(a) = a^x\ln(a).$$

5. Sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora:

$$\frac{d}{dx}x^\alpha = \frac{d}{dx}e^{\alpha\ln(x)} = \frac{\alpha}{x}e^{\alpha\ln(x)} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

8.1 Monotonia

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e sia $c \in [a,b]$.

— f è **crescente** in c se

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall x \in [a,b] \quad \begin{cases} x \in (c-\varepsilon, c) \to f(x) < f(c), \\ x \in (c, c+\varepsilon) \to f(c) < f(x). \end{cases}$$

— f è **decrescente** in c se

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall x \in [a,b] \quad \begin{cases} x \in (c-\varepsilon, c) \to f(x) > f(c), \\ x \in (c, c+\varepsilon) \to f(c) > f(x). \end{cases}$$

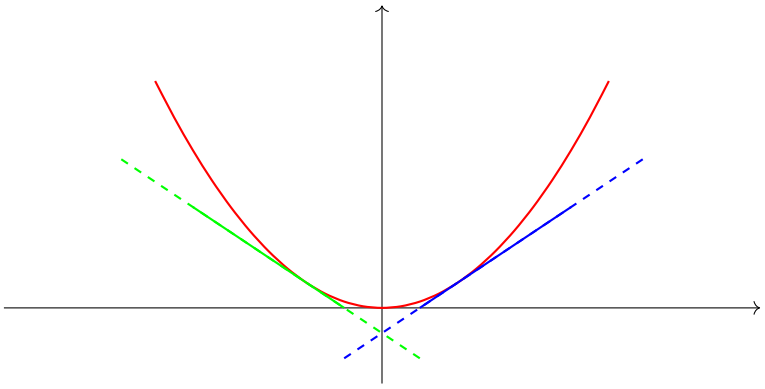
Criterio di monotonia locale Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e sia $c \in [a,b]$ tale che f sia differenziabile in c.

— Se $f'(c) > 0$, allora f è crescente in c.

— Se $f'(c) < 0$, allora f è decrescente in c.

— Se f è crescente in c, allora $f'(c) \geqslant 0$.

— Se f è decrescente in c, allora $f'(c) \leqslant 0$.



Punti critici Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e sia $c \in [a,b]$. Un punto interno $c \in (a,b)$ con $f'(c) = 0$ è detto **punto stazionario**. Più in generale, è un **punto critico** se $f'(c) = 0$ oppure la derivata non esiste.

Massimi e minimi locali Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e sia $c \in [a,b]$.

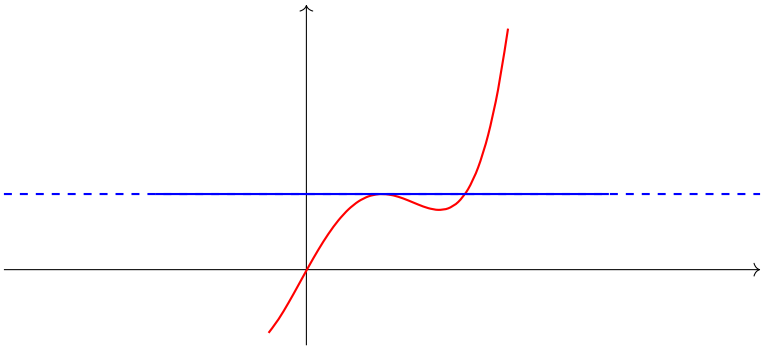
— c è un **punto di massimo locale** di f se

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall x \in [a,b] \quad (x \in B_c(\varepsilon) \to f(c) \geqslant f(x)).$$

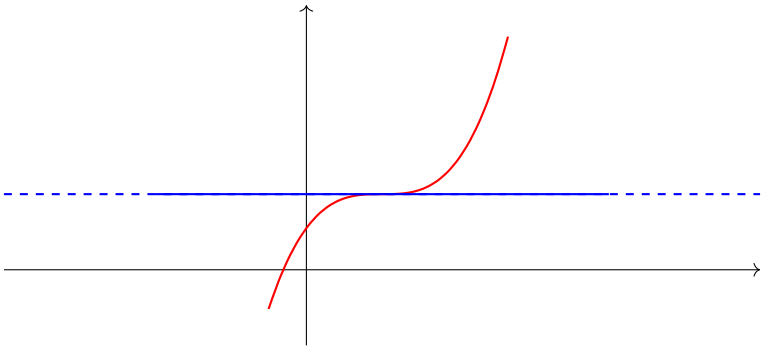
— c è un **punto di minimo locale** di f se

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall x \in [a,b] \quad (x \in B_c(\varepsilon) \to f(c) \leqslant f(x)).$$

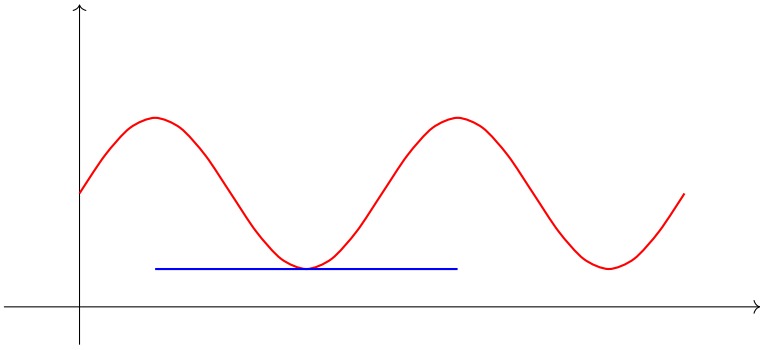
Teorema di Fermat per i punti di massimo e minimo locali Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e sia $c \in (a,b)$ un massimo locale o minimo locale tale che f sia differenziabile in c. Allora $f'(c) = 0$.



Punti di flesso Un **punto di flesso** è un punto interno nel quale cambia la concavità della funzione (da concava a convessa o viceversa), quando tale concavità è definita in opportuni intervalli adiacenti. Un punto stazionario non è necessariamente un flesso: per esempio, $x = 0$ è minimo per $f(x) = x^2$, mentre è flesso stazionario per $f(x) = x^3$. La figura seguente illustra il secondo caso.

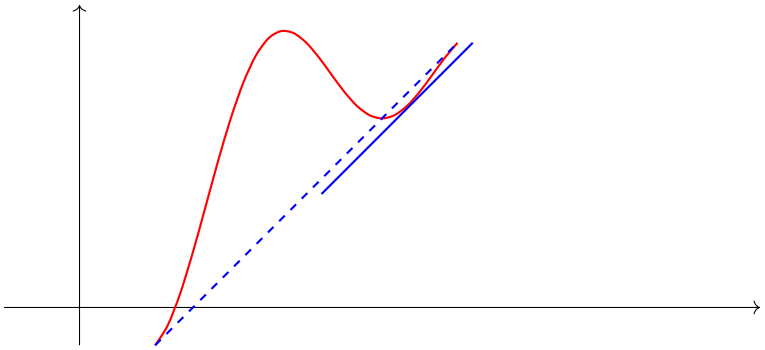


Teorema di Rolle Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a,b]$, tale che $f(a) = f(b)$ e differenziabile in (a,b). Allora esiste $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$.



Teorema di Lagrange Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a,b]$ e differenziabile in (a,b). Allora esiste $c \in (a,b)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Conseguenza (variante) Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a,b]$ e differenziabile in (a,b). Siano $m, M \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in (a,b)$,

$$m \leqslant f'(x) \leqslant M.$$

Allora, per ogni $c, d \in [a,b]$ tali che $c \leqslant d$ abbiamo

$$m \cdot (d-c) \leqslant f(d) - f(c) \leqslant M(d-c).$$

Conseguenza del teorema di Lagrange: funzioni costanti Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a,b]$ e differenziabile in (a,b). Se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a,b)$, allora f è costante.

8.2 Convessità e concavità

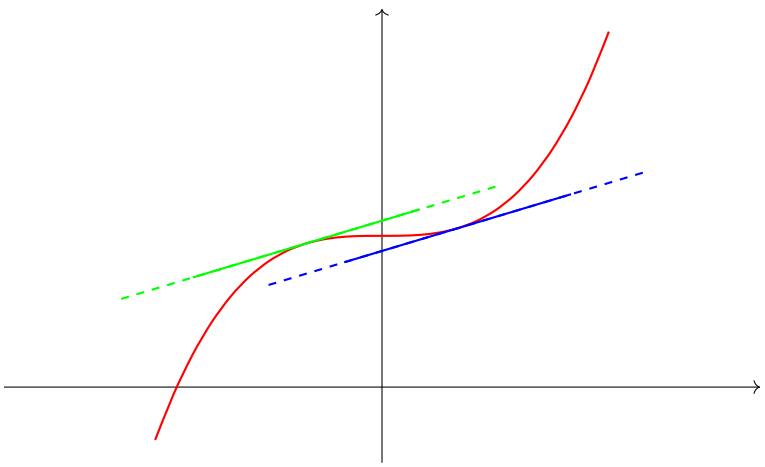
Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e sia $c \in [a,b]$ tale che f sia differenziabile in c, e sia $t\colon x \mapsto \left(\frac{df}{dx}(c)\right)(x-c) + f(c)$ la retta tangente a f in c.

— il grafico di f sta **strettamente sopra la tangente** vicino a c se

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall x \in [a,b] \quad (x \in B_c(\varepsilon) \setminus \{c\} \to t(x) < f(x)).$$

— il grafico di f sta **strettamente sotto la tangente** vicino a c se

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall x \in [a,b] \quad (x \in B_c(\varepsilon) \setminus \{c\} \to t(x) > f(x)).$$



Criterio di convessità o concavità locale Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e sia $c \in (a,b)$ tale che f sia due volte differenziabile in un intorno di c.

— Se $f'' > 0$ in un intorno di c, allora f è strettamente convessa in quell'intorno.

— Se $f'' < 0$ in un intorno di c, allora f è strettamente concava in quell'intorno.

— Se f è convessa in un intorno di c, allora $f''(c) \geqslant 0$.

— Se f è concava in un intorno di c, allora $f''(c) \leqslant 0$.

8.3 Regola di de l'Hôpital

Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue in $[a,b]$ e derivabili in (a,b) eccetto al più in c; sia $g'(x) \neq 0$ per $x \neq c$. Sia inoltre

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \quad \text{oppure} \quad \lim_{x\to c} |f(x)| = \lim_{x\to c} |g(x)| = \infty,$$

ed esista

$$\ell = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

Allora

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Esempi I limiti notevoli del capitolo precedente si possono calcolare in maniera alternativa utilizzando la regola di de l'Hôpital:

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1.$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{1} = 0.$

Ulteriori limiti notevoli

1. $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\pm\infty} \exp\left(x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \exp\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \exp\left(\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}\right) =$
   $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \exp\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) = e.$
2. Per calcolare $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$, utilizziamo un cambio di variabile. Poniamo $x = \frac{1}{y}$. Poiché $x \to 0$, avremo $y \to \pm\infty$. Quindi:
   $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e.$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1.$

Esercizi

Esercizio 8.1. Trova un esempio di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nei seguenti casi:

1. f continua ma non derivabile.
2. f derivabile ovunque tranne in 0.
3. f crescente in $(-\infty, 0)$ ma decrescente in $(0, +\infty)$.
4. f concava in $(-\infty, 0)$ ma convessa in $(0, +\infty)$.
5. $f'(0) = 0$.
6. $f'(0) = f(0)$.
7. $f'(x) = f(x)$ per ogni x.
8. $\dfrac{d}{dx} f(x) = \dfrac{2}{x} f(x)$.
9. $f^{(100)} = f$.
10. f non nulla tale che $f''(x) = 0$ per ogni x.
11. f è derivabile (quasi ovunque) ma la sua derivata non è continua.
12. f non è continua ma è derivabile in qualche punto.
13. f è illimitata ma derivabile ovunque.
14. f ha derivata nulla in un insieme infinito ma non è costante.
15. f concava ovunque ma non polinomiale.
16. f convessa ovunque e limitata inferiormente ma non superiormente.
17. f ha un flesso in 0 ma non ha derivata seconda in 0.
18. f è crescente ovunque ma la derivata è zero in un insieme infinito.

Esercizio 8.2. Vero o falso? Motivare.

1. Esiste una funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tale che f' è sempre positiva e 0 è un punto di minimo di f.
2. Ogni funzione f continua è anche derivabile.
3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se c è un punto di massimo o minimo locale, allora $f'(c) = 0$.
4. Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Se c è un punto di massimo o minimo locale, allora $f'(c) = 0$.
5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se $f'(c) = 0$, allora c è un punto di massimo o minimo locale.
6. Sia $f : D \to \mathbb{R}$ (dove $D \subseteq \mathbb{R}$). Se $f'(x) > 0$ per ogni x, allora f ha un massimo in qualche punto.
7. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha un massimo locale in c ed è derivabile in c, allora $f'(c) = 0$.
8. Se f è convessa, allora è derivabile.
9. Se f è derivabile ovunque e $f'(x) = 0$ per ogni x, allora f è costante.

Esercizio 8.3. Calcolare utilizzando la definizione di derivata come *limite del rapporto incrementale*:

1. $\dfrac{d}{dx} 2025$.
2. $\dfrac{d}{dx}(x + 2)$.
3. $\dfrac{d}{dx}(2x + 1)$.
4. $\dfrac{d}{dx}(x - 1)(x + 1)$.
5. $\dfrac{d}{dx} \dfrac{1}{x - 1}$.
6. $\dfrac{d}{dx} \sqrt{x + 3}$.
7. $\dfrac{d}{dx} |x|$.
8. $\dfrac{d}{dx} x^2$.
9. $\dfrac{d}{dx} x^3$.
10. $\dfrac{d}{dx}(x^2 + 3x + 1)$.
11. $\dfrac{d}{dx} \dfrac{x}{x + 1}$.
12. $\dfrac{d}{dx} \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

13. $\frac{d}{dx}\sqrt{x}$ (per $x > 0$).
14. $\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}$.
15. $\frac{d}{dx}|x-1|$.
16. $\frac{d}{dx}(x+1)^{1/3}$.
17. $\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ (per $x > -1$).

Esercizio 8.4. Calcolare utilizzando la formula di derivata dell'inversa:

1. $\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x}$.
2. $\frac{d}{dx}\ln(x)$.
3. $\frac{d}{dx}\arcsin(x)$.
4. $\frac{d}{dx}\arccos(x)$.
5. $\frac{d}{dx}\arctan(x)$.
6. $\frac{d}{dx}\operatorname{arccot}(x)$.
7. $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec}(x)$.
8. $\frac{d}{dx}\operatorname{arccsc}(x)$.

Esercizio 8.5. Calcolare, utilizzando i metodi opportuni:

1. $\frac{d}{dx}(15x+3)$.
2. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{8}x^{44} - \frac{\pi}{2}x^{-12}\right)$.
3. $\frac{d}{dx}(2x+2024)^5$.
4. $\frac{d}{dx}(x+2024)(x^5-2025)$.
5. $\frac{d}{dx}\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}$.
6. $\frac{d}{dx}(x^2-2024)^{-5/3}$.
7. $\frac{d}{dx}\frac{1}{|x|}$.
8. $\frac{d}{dx}\frac{1}{\ln(x)}$.
9. $\frac{d}{dx}\ln|x|$.
10. $\frac{d}{dx}\sin(ax)$, con $a \in \mathbb{R}$.
11. $\frac{d}{dx}\cos(ax)$, con $a \in \mathbb{R}$.
12. $\frac{d}{dx}\sin(x^2)$.
13. $\frac{d}{dx}e^{x^2}$.
14. $\frac{d}{dx}\ln(1+x)$ (per $x > -1$).
15. $\frac{d}{dx}\sqrt{1+x}-1$.
16. $\frac{d}{dx}\big(\cos(x)+\sin(x)\big)$.
17. $\frac{d}{dx}\big(x\sin x\big)$.
18. $\frac{d}{dx}\sin(3x+2)$.
19. $\frac{d}{dx}\sin^2 x$.
20. $\frac{d}{dx}\cos^2 x$.
21. $\frac{d}{dx}10^x$.
22. $\frac{d}{dx}\log_{10}(x)$.
23. $\frac{d}{dx}e^{\frac{1}{x}}$.
24. $\frac{d}{dx}x^x$.
25. $\frac{d}{dx}(e^{x^2+10}+2x^2)$.
26. $\frac{d}{dx}\sin(x)\cos(x)$.
27. $\frac{d}{dx}e^x\cos(x+1)$.
28. $\frac{d}{dx}\frac{\sin(x)}{x^2+1}$.

29. $\frac{d}{dx}\frac{\cos(x)+1}{e^{2x}}$.
30. $\frac{d}{dx}\sqrt{x\ln(x)}$.
31. $\frac{d}{dx}\csc(2x)$.
32. $\frac{d^2}{dx^2}\exp(x)$.
33. $\frac{d^2}{dx^2}\sin(x)$.
34. $\frac{d^2}{dx^2}\cos(x)$.
35. $\frac{d^2}{dx^2}\ln(x)$.
36. $\frac{d^2}{dx^2}(2x+2)^5$.
37. $\frac{d}{dx}\sqrt[x]{x}$ (quando ha senso).
38. $\frac{d}{dx}\arctan(x^2)$.
39. $\frac{d}{dx}\big(\arctan(\sqrt{x})\big)$.
40. $\frac{d}{dx}\big(\ln(\sqrt{x^2+1}+x)\big)$.

Esercizio 8.6. Quali delle seguenti funzioni sono strettamente monotone? Quali concave? Quali convesse?

1. $f\colon x\mapsto 3x+2$.
2. $f\colon x\mapsto x+x^2$.
3. $f\colon x\mapsto 5$.
4. $f\colon x\mapsto x^5$.
5. $f\colon x\mapsto x^5-x$.
6. $f\colon x\mapsto \sqrt{x}+1$.
7. $f\colon x\mapsto -\sqrt{x}+1$.
8. $f\colon x\mapsto (x^2-1)^{-1}$.
9. $f\colon x\mapsto \begin{cases} x^3 & \text{se } x\leqslant 0,\\ 0 & \text{se } x>0.\end{cases}$
10. $f\colon x\mapsto \arctan(x)$.
11. $f\colon x\mapsto \ln e^{-x}$.
12. $f\colon x\mapsto e^{\cos x}$.
13. $f\colon x\mapsto \frac{x}{\ln x}$.
14. $f\colon x\mapsto \frac{(\ln x)^2}{x}$.
15. $f\colon x\mapsto x^2-4x+3$.
16. $f\colon x\mapsto -x^2$.
17. $f\colon x\mapsto \frac{1}{x}$ (dominio: $\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$).
18. $f\colon x\mapsto \frac{1}{x^2}$ (dominio: $\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$).
19. $f\colon x\mapsto |x-1|$.
20. $f\colon x\mapsto \ln x$ (dominio: $(0,+\infty)$).
21. $f\colon x\mapsto e^x$.
22. $f\colon x\mapsto \sqrt{x}$ (dominio: $(0,+\infty)$).
23. $f\colon x\mapsto x^{1/3}$.
24. $f\colon x\mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$.
25. $f\colon x\mapsto \frac{x}{1+x^2}$.
26. $f\colon x\mapsto \sin x$ (dominio: $[-\pi/2,\pi/2]$).
27. $f\colon x\mapsto \cos x$ (dominio: $[0,\pi]$).
28. $f\colon x\mapsto \frac{1}{1+e^{-x}}$.
29. $f\colon x\mapsto x\ln x$ (dominio: $(0,+\infty)$).
30. $f\colon x\mapsto x^\alpha$ con $\alpha>1$ fissato (dominio: $(0,+\infty)$).
31. $f\colon x\mapsto x^\alpha$ con $0<\alpha<1$ fissato (dominio: $(0,+\infty)$).
32. $f\colon x\mapsto \begin{cases} x^2 & x\leq 1,\\ 2x-1 & x>1.\end{cases}$
33. $f\colon x\mapsto \lfloor x\rfloor$.
34. $f\colon x\mapsto \frac{\ln x}{x}$ (dominio: $(0,+\infty)$).
35. $f\colon x\mapsto \frac{x^3-3x}{3}$.
36. $f\colon x\mapsto \sqrt{1+x^2}$.

Esercizio 8.7. Per ciascuna delle seguenti funzioni $f : D \to \mathbb{R}$, svolgere lo studio completo:

(a) determinare il dominio D;

(b) calcolare (se definito) $f(0)$;

(c) studiare il segno di f;

(d) studiarne la continuità;

(e) calcolare i limiti di f per $x \to \pm\infty$;

(f) calcolare i limiti per $x \to c$ in corrispondenza di ogni eventuale punto di discontinuità c;

(g) studiare la monotonia di f;

(h) studiare la concavità e convessità di f.

Analizzare f nei seguenti casi:

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
2. $f(x) = -x^3 + 2x$.
3. $f(x) = |x - 2|$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.
5. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$.
6. $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.
7. $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$.
8. $f(x) = \sqrt{x+3}$.
9. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.
10. $f(x) = \sqrt{5}(x-1)(x-3)^3$.
11. $f(x) = e^x - 2$.
12. $f(x) = \ln(3-x)$.
13. $f(x) = xe^{-x}$.
14. $f(x) = \dfrac{\cos x}{x+2}$.
15. $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 0, \\ x^2 & x \geq 0. \end{cases}$
16. $f(x) = \dfrac{2x^2-3}{x+1}$.
17. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
18. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
19. $f(x) = x^3 - 3x$.
20. $f(x) = \sqrt{1+e^{-x}}$.
21. $f(x) = e^{\sqrt{x+1}}$.

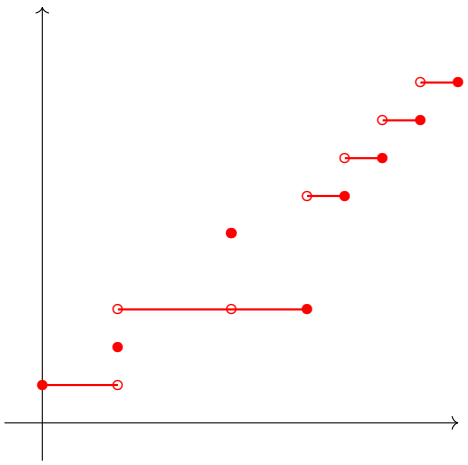
9 Integrali

9.1 L'integrale di una funzione a scala

Funzione a scala Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è detta **funzione a scala** (o **costante a tratti**) se esistono $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b$ tali che

$$x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$$

e f è costante in ogni intervallo (x_{i-1}, x_i).[1]

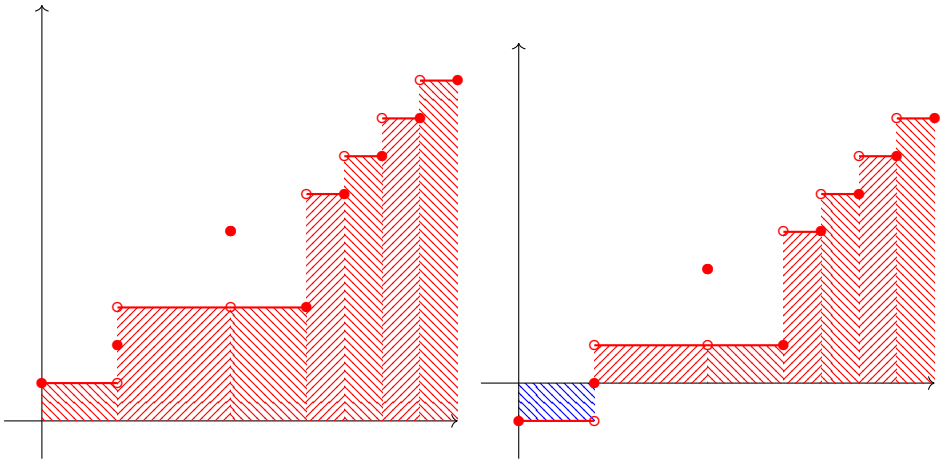


L'integrale di una funzione a scala Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione a scala tale che sia costante su ogni intervallo (x_{i-1}, x_i) per $i = 1, ..., n$. Sia c_i il valore di f nell'intervallo (x_{i-1}, x_i). Allora l'**integrale** di f è definito come:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

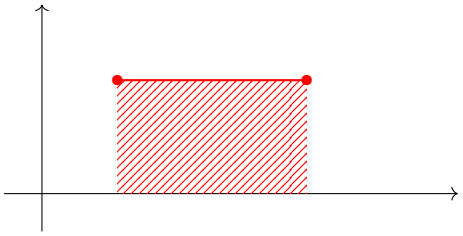
Interpretazione geometrica: area

[1] Nota: L'intervallo è aperto, non è importante il valore che assume f negli x_i.



Esempio La funzione costante $\hat{c}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione a scala poiché è costante sull'intervallo (a,b). Abbiamo:

$$\int_a^b \hat{c}(x)dx = \int_a^b c\,dx = \sum_{i=1}^{1} c \cdot (x_i - x_{i-1}) = c \cdot (b-a).$$



Proprietà Siano $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ delle funzioni a scala, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora:

1. $f+g$ è una funzione a scala e
$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$
2. $\lambda \cdot f$ è una funzione a scala e
$$\int_a^b (\lambda \cdot f)(x)dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx,$$
3. Se $f(x) \leqslant g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, allora
$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$$
per ogni $x \in [a,b]$.

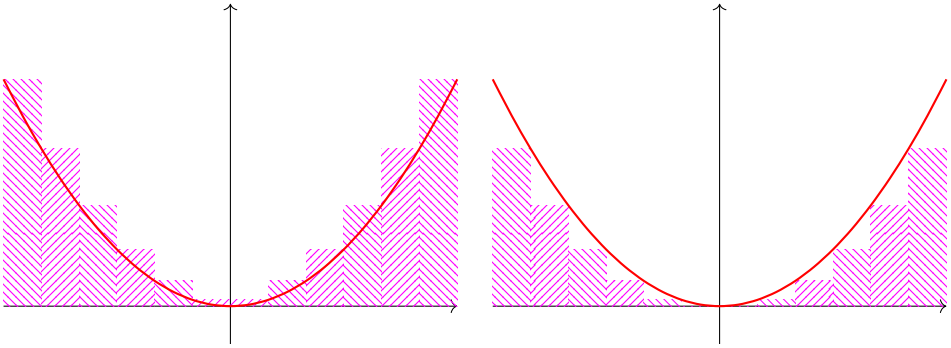
9.2 L'integrale di Riemann

Integrale superiore e integrale inferiore Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata.

1. L'**integrale superiore** di f è definito come:
$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\left\{ \int_a^b s(x)dx \colon \begin{array}{l} s\colon [a,b] \to \mathbb{R} \text{ è una funzione a scala} \\ \text{tale che } \forall x \in [a,b](f(x) \leqslant s(x)) \end{array} \right\}$$

2. L'**integrale inferiore** di f è definito come:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\left\{ \int_a^b s(x)dx : \begin{array}{l} s\colon [a,b] \to \mathbb{R} \text{ è una funzione a scala} \\ \text{tale che } \forall x \in [a,b](s(x) \leqslant f(x)) \end{array} \right\}$$



Esempi

1. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione a scala. Allora:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

2. Consideriamo la **funzione di Dirichlet**

$$\begin{aligned} \mathrm{Dir}\colon [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{I}. \end{cases} \end{aligned}$$

Abbiamo:

$$\overline{\int_0^1} \mathrm{Dir}(x)\,dx = 1 \neq 0 = \underline{\int_0^1} \mathrm{Dir}(x)\,dx.$$

L'integrale di Riemann Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Se

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx,$$

allora f è detta **integrabile (secondo Riemann)**. In questo caso definiamo l'**integrale di Riemann** di f:

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Inoltre, dato $c \in [a,b]$, definiamo:

$$\int_c^c f(x)dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Condizioni sufficienti per l'integrabilità Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è

1. continua, oppure
2. monotona,

allora f è integrabile secondo Riemann.

Proprietà Siano $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ delle funzioni integrabili secondo Riemann, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora:

1. $f+g$ è integrabile secondo Riemann e
$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$
2. $\lambda \cdot f$ è integrabile secondo Riemann e
$$\int_a^b (\lambda \cdot f)(x)dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx,$$
3. Se $f(x) \leqslant g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, allora
$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$$
per ogni $x \in [a,b]$.
4. $|f|$ è integrabile secondo Riemann e
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

La restrizione di una funzione Sia $f\colon A \to B$ una funzione, e sia $C \subseteq A$. La **restrizione** di f a C è la funzione

$$\begin{aligned} f|_C\colon C &\to B, \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Proprietà: Additività Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann, e sia $c \in [a,b]$. Allora f è integrabile secondo Riemann se e solo se le restrizioni $f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,b]}$ sono integrabili secondo Riemann, e:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

9.3 Integrali e derivate

Notazione Siano $f\colon D \to \mathbb{R}$ (dove $D \subseteq \mathbb{R}$), e siano $a, b \in D$. Scriviamo:
$$f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a).$$

Funzioni primitive Siano $f, F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, e sia F differenziabile. Diciamo che F è una **funzione primitiva** di f se $F' = f$.

Osservazione Una funzione f può avere più di una funzione primitiva. Ad esempio, se $f = \hat{0}$, allora ogni funzione della forma $F = \hat{c}$ è una funzione primitiva di f.

Teorema della differenza delle primitive Siano $f, F, G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, e sia F una funzione primitiva di f. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

(a) G è una funzione primitiva di f,

(b) $F - G$ è una funzione costante.

Funzione integrale e integrale indefinito Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia $c \in [a,b]$. La **funzione integrale** di f, con punto base c, è la funzione

$$\begin{aligned} F\colon [a,b] &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \int_c^x f(t)dt. \end{aligned}$$

La notazione $\int f(x)\,dx$ (**integrale indefinito**) indica invece la famiglia delle primitive $F(x)+C$, dove $C \in \mathbb{R}$.

Teorema Fondamentale del Calcolo—Parte I Sia F la funzione integrale di f. Allora F è differenziabile e F è una funzione primitiva di f.

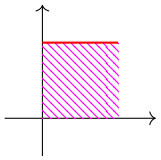
Teorema Fondamentale del Calcolo—Parte II Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia F una funzione primitiva di f. Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

Esempi

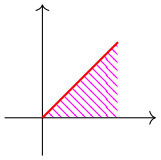
1. Ricordando che id è una primitiva di $\hat{1}$, otteniamo:

$$\int_0^1 1\,dx = \int_0^1 \hat{1}(x)dx = \int_0^1 \mathrm{id}'(x)dx = \mathrm{id}(x)\Big|_0^1 = 1 - 0 = 1.$$



2. Ricordando che $\square^2$ è una primitiva di $2 \cdot \square$, otteniamo:

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2x\,dx = \frac{1}{2}\left(x^2\Big|_0^1\right) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}.$$



3. Ricordando che $\square^3$ è una primitiva di $3 \cdot \square^2$, otteniamo:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 3x^2\,dx = \frac{1}{3}\left(x^3\Big|_0^1\right) = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}.$$

4. Ricordando che $\square^{n+1}$ è una primitiva di $(n+1)\cdot\square^n$, otteniamo:

$$\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\int_0^1 (n+1)x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\Big|_0^1\right) = \frac{1}{n+1}(1-0) = \frac{1}{n+1}.$$

5. Ricordando che ln è una primitiva di $\frac{1}{\square}$, otteniamo:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)\Big|_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$$

Regola di sostituzione Sia $f\colon [a^*,b^*] \to \mathbb{R}$ continua, e sia $g\colon [a,b] \to [a^*,b^*]$ tale che g' sia continua. Allora:

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx.$$

Esempi

1. Sia $c \in \mathbb{R}$. Allora:

$$\int_a^b f(t+c)dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx.$$

Infatti, se consideriamo $g\colon t \mapsto t+c$, allora:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t+c)dt &= \int_a^b f(g(t))g'(t)dt \\ &= \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx.\end{aligned}$$

2. Sia $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Allora:

$$\int_a^b f(c\cdot t)dt = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)dx.$$

Infatti, se consideriamo $g\colon t \mapsto c\cdot t$, allora:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(ct)dt &= \int_a^c \frac{1}{c} f(ct)c\,dt \\ &= \frac{1}{c}\int_a^c f(g(t))g'(t)dt \\ &= \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(x)dx\end{aligned}$$

Regola di integrazione per parti Siano $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tali che f',g' siano continue. Allora:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Esempi

1. Siano $a,b > 0$.

$$\begin{aligned}\int_a^b \ln(x)dx &= \int_a^b \ln(x)\,\mathrm{id}'(x)dx \\ &= \ln(x)\,\mathrm{id}(x)\Big|_a^b - \int_a^b \ln'(x)\,\mathrm{id}(x)dx \\ &= x\ln(x)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{1}{x}x\,dx \\ &= x\ln(x)\Big|_a^b - \int_a^b 1\,dx \\ &= x\ln(x)\Big|_a^b - x\Big|_a^b = (x\ln(x)-x)\Big|_a^b = x(\ln(x)-1)\Big|_a^b.\end{aligned}$$

2. Supponiamo di voler calcolare

$$\int_a^b \exp(t)\cos(t)dt.$$

Ricordando che $\exp' = \exp$, abbiamo:

$$\begin{aligned}\int_a^b \exp(t)\cos(t)dt &= \int_a^b \exp'(t)\cos(t)dt \\ &= \exp(t)\cos(t)\Big|_a^b - \int_a^b \exp(t)(-\sin)(t)dt \\ &= \exp(t)\cos(t)\Big|_a^b + \int_a^b \exp(t)\sin(t)dt.\end{aligned}$$

D'altra parte:

$$\begin{aligned}\int_a^b \exp(t)\sin(t)dt &= \int_a^b \exp'(t)\sin(t)dt \\ &= \exp(t)\sin(t)\Big|_a^b - \int_a^b \exp(t)\cos(t)dt,\end{aligned}$$

da cui

$$\int_a^b \exp(t)\cos(t)dt = \exp(t)\sin(t)\Big|_a^b - \int_a^b \exp(t)\sin(t)dt.$$

Sommando, otteniamo:

$$2\int_a^b \exp(t)\cos(t)dt = \exp(t)\cos(t)\Big|_a^b + \exp(t)\sin(t)\Big|_a^b,$$

da cui concludiamo:

$$\int_a^b \exp(t)\cos(t)dt = \frac{1}{2}\exp(t)(\cos(t)+\sin(t))\Big|_a^b.$$

Esercizi

Esercizio 9.1. Trovare un esempio di una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ nei seguenti casi:

1. f non integrabile.
2. $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$.
3. $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx = 1$.

Esercizio 9.2. Utilizzando il teorema fondamentale del calcolo, determinare:

1. $\int_1^2 1\,dx$.
2. $\int_1^2 (-1)\,dx$.
3. $\int_2^1 1\,dx$.
4. $\int_{-2}^{-1} 1\,dx$.
5. $\int_0^1 x\,dx$.
6. $\int_0^1 x^2\,dx$.
7. $\int_0^1 x^3\,dx$.
8. $\int_1^2 x^\alpha\,dx$, dove $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è fissato.
9. $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.
10. $\int_{-1}^1 |x|\,dx$.
11. $\int_0^\pi \sin(x)\,dx$.
12. $\int_0^\pi \cos(x)\,dx$.
13. $\int_0^2 \exp(x)\,dx$.
14. $\int_0^2 \frac{2}{x^2+1}\,dx$.

Esercizio 9.3. Calcolare:

1. $\int_0^1 2^x\,dx$.
2. $\int_0^1 10^x\,dx$.
3. $\int_0^1 -2^{-x}\,dx$.
4. $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.
5. $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$.
6. $\int_0^1 \left(x^{2022} + \frac{\sqrt{3}}{2}x^{2023}\right) dx$.
7. $\int_\pi^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)\,dx$.
8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2022^{2023}\cos(x)\,dx$.
9. $\int_{-1}^1 \exp(x+2)\,dx$.
10. $\int_{-1}^1 \exp(2x+1)\,dx$.
11. $\int_0^1 \sqrt{2}^e e^x\,dx$.
12. $\int_1^2 \frac{2\exp(2x)}{\exp(x)}\,dx$.
13. $\int_0^\pi \left(e^{x^2} - \sin\left(\frac{x^2}{2}\right)\right) dx$.
14. $\int_1^e \ln x\,dx$.
15. $\int_{-1}^1 \arccos x\,dx$.
16. $\int_0^1 \arcsin x\,dx$.

17. $\int_{-1}^{1} \arcsin x \, dx.$

18. $\int_{1}^{2} \ln x \, dx.$

19. $\int_{1}^{2} \log_2 x \, dx.$

20. $\int_{1}^{2} \log_{10} x \, dx.$

21. $\int_{a}^{b} x\cos(x) \, dx.$

22. $\int_{a}^{b} (2x-1)\sin(x) \, dx.$

23. $\int_{a}^{b} -x^2 \sin(x) \, dx.$

24. $\int_{a}^{b} x\sin(4x) \, dx.$

25. $\int_{a}^{b} x\exp(x) \, dx.$

26. $\int_{a}^{b} x^2 \exp(x) \, dx.$

27. $\int_{a}^{b} x^2 \exp(2x) \, dx.$

28. $\int_{a}^{b} x^2 \ln(x) \, dx.$

29. $\int_{a}^{b} x\sqrt{1+x} \, dx.$

30. $\int_{a}^{b} \sin\sqrt{x} \, dx.$

31. $\int_{-1}^{2} \frac{x+4}{x^2+2x-8} \, dx.$

32. $\int_{-1}^{2} \frac{12}{x^2+2x-8} \, dx.$

33. $\int_{a}^{b} \sqrt{15x-2} \, dx.$

34. $\int_{a}^{b} x\sqrt{x^2+1} \, dx.$

35. $\int_{2}^{4} x \cdot \exp(x^2) \, dx.$

36. $\int_{2}^{4} x^2 \cdot \exp(x^3) \, dx.$

37. $\int_{a}^{b} \frac{\exp(x)}{(3\exp(x)-1)^2} \, dx.$

38. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \, dx.$

39. $\int_{a}^{b} \frac{1}{x\ln(x)} \, dx.$

40. $\int_{a}^{b} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} \, dx.$

41. $\int_{a}^{b} \sin\sqrt{x} \, dx.$

42. $\int_{0}^{\pi} \sin x \cos x \, dx.$

43. $\int_{0}^{\pi} \sin^2 x \cos x \, dx.$

44. $\int_{0}^{\pi} \sin x \cos^2 x \, dx.$

45. $\int_{0}^{2} \frac{49}{x+7} \, dx.$

46. $\int_{0}^{2} \frac{21}{3x+7} \, dx.$

47. $\int_{0}^{2} \frac{3}{x^2+4x+4} \, dx.$

48. $\int_{0}^{2} \frac{3x+6}{2x+2} \, dx.$

49. $\int_{0}^{2} \frac{3x+6}{x+2} \, dx.$

50. $\int_{0}^{2} \frac{3x+5}{3x+2} \, dx.$

51. $\int_{0}^{2} \frac{3x+5}{4x+2} \, dx.$

52. $\int_{0}^{2} \frac{3x+5}{4x+3} \, dx.$

53. $\int_{0}^{2} \frac{\sqrt{2}}{(x+2)(x+3)} \, dx.$

54. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2} \, dx.$

55. $\int_{4}^{6} \frac{1}{4x^2-1} \, dx.$

56. $\int_4^6 \frac{1}{4x^2+1}\,dx.$

57. $\int_4^6 \frac{1}{x^2+4x+4}\,dx.$

58. $\int_4^6 \frac{1}{4x^2+4x+1}\,dx.$

59. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot x\,dx.$

60. $\int_0^{\pi/3} \tan x\,dx.$

61. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc x\,dx.$

62. $\int_0^{\pi/3} \sec x\,dx.$

63. $\int_0^1 \frac{x+1}{(x+2)(x+3)}\,dx.$

64. $\int_0^1 \frac{x+2}{(x+2)(x+3)}\,dx.$

65. $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x+1}\,dx.$

66. $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1}\,dx.$

67. $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2-1}\,dx.$

Per approfondire

Esercizio 9.4. Calcolare:

1. $\int_a^b \exp(x)\cos(x)\,dx.$

2. $\int_a^b \exp(x)\sin(x)\,dx.$

3. $\int_a^b \cos^2(x)\,dx.$

4. $\int_a^b \sin^2(x)\,dx.$

5. $\int_a^b 2^x \sin(x)\,dx.$

6. $\int_a^b 2^x \cos(x)\,dx.$

Parte II

Statistica descrittiva e inferenziale

10

Indici di centralità, dispersione e regressione

Nelle scienze sperimentali, il ricercatore si trova in presenza di dati che deve elaborare per poterli interpretare: è la situazione tipica della statistica.

Esempio Supponiamo di voler vedere come i voti dei cittadini di un Paese si ripartiscono tra i vari partiti. Ci sono due possibilità:

1. Chiedere ad **ogni** individuo di esprimere il proprio voto. In questo caso bisogna elaborare un'enorme quantità di dati, applicando operazioni piuttosto semplici (**Statistica descrittiva**).

2. Chiedere ad **un numero limitato** di individui di esprimere il proprio voto. In questo caso la quantità di dati è più contenuta, ma occorre domandarsi quanto i dati ottenuti siano significativi (**Statistica inferenziale**).

Tipi di dati e modalità Dobbiamo distinguere tra due tipi di dati:

1. Dati **quantitativi**: Dati per cui ha senso effettuare una serie di operazioni numeriche. A loro volta, i dati quantitativi possono essere

   (a) **discreti**: assumono valori isolati, tipicamente numeri interi o conteggi,

   (b) **continui**: possono assumere, in un modello ideale, tutti i valori di un intervallo reale.

   I caratteri quantitativi si distinguono inoltre secondo la scala di misura:

   (a) **a rapporti**: possiedono uno zero assoluto e hanno significato i rapporti tra valori,

   (b) **a intervalli**: lo zero è convenzionale; hanno significato le differenze, ma non i rapporti tra valori.

2. Dati **qualitativi**: Tutti i dati non quantitativi. Possono essere:

   (a) **nominali**: rappresentano categorie che non hanno un ordine naturale,

   (b) **ordinali**: rappresentano categorie che hanno un ordine, ma la distanza tra le categorie non è necessariamente uniforme o misurabile.

I possibili valori che può assumere un carattere qualitativo o quantitativo discreto si chiamano **modalità**.

Esempi

1. Numero di figli: il carattere è quantitativo, discreto e rapporto. L'insieme delle modalità è $\mathbb{N}$ (o un suo opportuno sottoinsieme).
2. Lunghezza / altezza / peso / ...: il carattere è quantitativo, continuo e rapporto. L'insieme delle modalità è un opportuno intervallo di $\mathbb{R}$.
3. Temperatura: il carattere è quantitativo, continuo e intervallo (infatti 0^o NON rappresenta l'assenza di temperatura). L'insieme delle modalità è un opportuno intervallo di $\mathbb{R}$.
4. Gruppi sanguigni: il carattere è qualitativo nominale. Le modalità sono A, B, AB, 0.
5. Partito politico: il carattere è qualitativo nominale. Le modalità possono variare a seconda dell'elezione considerata.
6. Recensioni su Booking/Amazon/TripAdvisor: il carattere è qualitativo ordinale. Le modalità sono $1, 2, 3, 4, 5$.

Indici di centralità e di dispersione

— Un **campione** di numerosità n è una collezione di n osservazioni o misurazioni, eventualmente con valori ripetuti.

— Un **indice di centralità** è una misura che descrive la posizione centrale di un campione. Questo tipo di misura fornisce un valore rappresentativo attorno al quale i dati tendono a raggrupparsi. Ci sono diverse misure di centralità comuni, tra cui la media, la mediana e la moda.

— Un **indice di dispersione** è una misura che descrive quanto i dati in un campione si discostano dal valore centrale, fornendo quindi un'indicazione della variabilità o della diffusione dei dati. Ci sono diversi indici di dispersione comuni, tra cui la deviazione standard, l'intervallo e la varianza.

Tra gli indici di centralità e dispersione più utilizzati:

indice di centralità	**indice di dispersione**
moda	—
mediana	ampiezza interquartile
	range
media (aritmetica)	varianza
	deviazione standard

10.1 Frequenza e moda

Frequenza e moda Consideriamo l'osservazione di un carattere avente K modalità, che indichiamo con $M_1, M_2, ..., M_K$, e supponiamo di avere un campione $x = \{x_1, ..., x_n\}$. Sia $1 \leqslant k \leqslant K$.

1. Si chiama **frequenza effettiva** (o semplicemente **effettivo**) di M_k il numero N_k di volte che la modalità k è stata osservata all'interno del campione x. In altre parole, N_k è il numero degli x_i tali che $x_i = M_k$.
2. Si chiama **frequenza relativa** di M_k la quantità
$$p_k = \frac{N_k}{n}.$$
3. Si chiama **moda** la modalità con frequenza (relativa o effettiva) più alta. Si tratta di un indice di centralità.

Le frequenze di modalità discrete si rappresentano spesso mediante un **diagramma a barre**; un **istogramma** è utilizzato soprattutto per dati quantitativi raggruppati in intervalli.

Osservazione Abbiamo:

1. $N_1 + N_2 + ... + N_K = n$,
2. $p_1 + p_2 + ... + p_K = 1$.

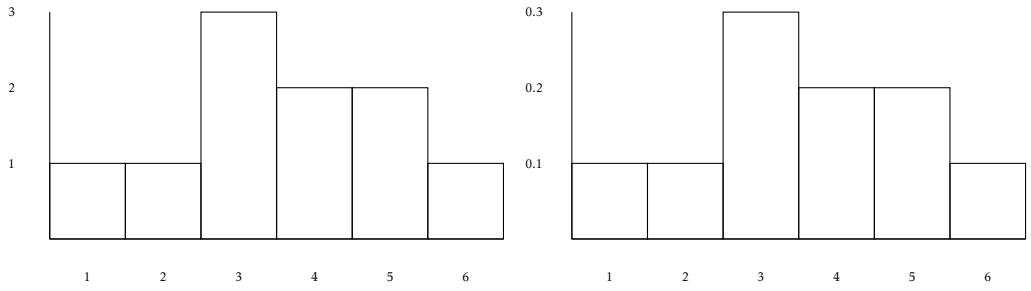
Esempio Lanciamo un dado dieci volte. Otteniamo i seguenti valori:

$$4, 2, 1, 3, 4, 5, 5, 6, 3, 3.$$

Abbiamo:

modalità	1	2	3	4	5	6
fr. effettiva	1	1	3	2	2	1
fr. relativa	0.1	0.1	0.3	0.2	0.2	0.1

Diagramma delle frequenze effettive (sinistra) e delle frequenze relative (destra):



La moda è 3.

Osservazione Nel caso di un carattere continuo, questa procedura non è praticabile. Bisogna quindi considerare una divisione in classi dei dati. Ad esempio, se misuriamo una temperatura che può variare da $0°C$ a $100°C$, può essere ragionevole considerare gli **intervalli di indeterminazione**

$$[0, 0.5), [0.5, 1.5), [1.5, 2.5), ..., [98.5, 99.5), [99.5, 100].$$

In generale, comunque, non esiste un modo universale per determinare la migliore ampiezza delle classi, può dipendere dalle situazioni.

Segnaliamo la **regola di Sturges**, che suggerisce, dato un numero n di osservazioni, di utilizzare un numero di classi pari a $1 + \log_2 n$.

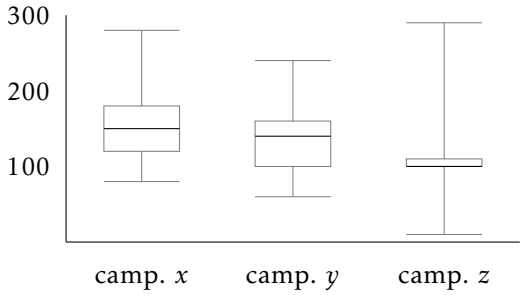
10.2 Mediana e quantili

Quantili Consideriamo un campione quantitativo ordinato $x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(n)}$. Per $0 < \alpha \leqslant 1$ definiamo il **quantile empirico di ordine** α secondo la convenzione

$$q_\alpha = x_{(\lceil n\alpha \rceil)}.$$

Poniamo inoltre $q_0 = x_{(1)}$. Si tratta di una delle possibili convenzioni per i quantili campionari; altre convenzioni, anche basate sull'interpolazione, possono produrre valori leggermente diversi. I valori $q_{1/4}$, $q_{1/2}$ e $q_{3/4}$ sono rispettivamente il primo, il secondo e il terzo **quartile**; il secondo quartile è una possibile definizione di **mediana**. Un'altra convenzione molto comune, per un numero pari di dati, usa la media dei due valori centrali. La quantità $x_{(n)} - x_{(1)}$ è il **campo di variazione** (o **range**), mentre $q_{3/4} - q_{1/4}$ è l'**ampiezza interquartile**.

Questi valori vengono spesso rappresentati mediante un **boxplot**.



10.3 Media e varianza

Media e varianza Consideriamo l'osservazione di un carattere quantitativo, e supponiamo di avere un campione $x = \{x_1, ..., x_n\}$.

1. Si chiama **media aritmetica** (o semplicemente **media**) di x la quantità

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

   Si tratta di un indice di centralità.

2. Si chiama **scarto** (o **errore**) di x_i la quantità $\overline{x} - x_i$.

   Si chiama **scarto quadratico** di x_i la quantità $(\overline{x} - x_i)^2$.

3. Si chiama **varianza** di x lo **scarto quadratico medio**, ovvero la quantità

$$\mathrm{Var}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - x_i)^2.$$

   La quantità $\sigma_x = \sqrt{\mathrm{Var}(x)}$ si chiama **deviazione standard**.

   Si tratta di indici di dispersione.

4. Se $\overline{x} \neq 0$, si chiama **coefficiente di variazione** la quantità

$$\mathrm{CV}(x) = \frac{\sigma_x}{|\overline{x}|}.$$

   Si tratta di un indice di dispersione relativizzato, e quindi non dipende dall'unità di misura usata.

5. Spesso si usa la **varianza campionaria**

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - x_i)^2 = \frac{n}{n-1}\sigma_x^2$$

   al posto di σ_x^2.

   La quantità s_x si chiama **deviazione standard campionaria**.

   Il **coefficiente di variazione campionario** è

$$\mathrm{CVC}(x) = \frac{s_x}{|\overline{x}|} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\,\mathrm{CV}(x) \qquad (n > 1,\ \overline{x} \neq 0).$$

Osservazioni Consideriamo l'osservazione di un carattere quantitativo, e supponiamo di avere un campione $x = \{x_1, ..., x_n\}$.

1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Se poniamo $y_i = ax_i + b$, allora

$$\overline{y} = a\overline{x} + b,$$
$$\sigma_y^2 = a^2\sigma_x^2.$$

2. Supponiamo di avere un altro campione $y = \{y_1, ..., y_m\}$, e consideriamo il campione $w_1, ..., w_{n+m}$ ottenuto unendo i due campioni, ovvero:

$$\begin{aligned} w_1 &= x_1, & w_{n+1} &= y_1, \\ w_2 &= x_2, & w_{n+2} &= y_2, \\ &\vdots & &\vdots \\ w_n &= x_n, & w_{n+m} &= y_m. \end{aligned}$$

Allora:

$$\overline{w} = \frac{n}{n+m}\overline{x} + \frac{m}{n+m}\overline{y}.$$

Osservazione Consideriamo l'osservazione di un carattere quantitativo avente K modalità, che indichiamo con $M_1, M_2, ..., M_K$, e supponiamo di avere un campione $x = \{x_1, ..., x_n\}$. Se $p_1, ..., p_K$ sono le frequenze relative di x, allora

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{K} p_i M_i,$$
$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{K} p_i (M_i - \overline{x})^2$$

Media ponderata Consideriamo l'osservazione di un carattere quantitativo, e supponiamo di avere un campione $x = \{x_1, ..., x_n\}$. Supponiamo che a ogni misurazione x_i sia assegnato un **peso** $f_i \geqslant 0$, con $\sum_i f_i > 0$. Si chiama **media ponderata** (o **media pesata**) di x la quantità

$$\overline{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + ... + f_n x_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}.$$

10.4 Correlazione e tecniche di interpolazione

Correlazione Consideriamo l'osservazione di due caratteri quantitativi, e supponiamo di avere i campioni $x = \{x_1, ..., x_n\}$ e $y = \{y_1, ..., y_n\}$.

1. La **covarianza** di x e y è la quantità

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y}.$$

2. Il **coefficiente di correlazione** di x e y è la quantità

$$\rho_{x,y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Procedura di interpolazione lineare: Metodo dei minimi quadrati Consideriamo l'osservazione di due caratteri quantitativi, e supponiamo di avere i campioni $x = \{x_1, ..., x_n\}$ e $y = \{y_1, ..., y_n\}$. Il **metodo dei minimi quadrati** ha lo scopo di costruire la retta che meglio rappresenti la correlazione tra questi dati.

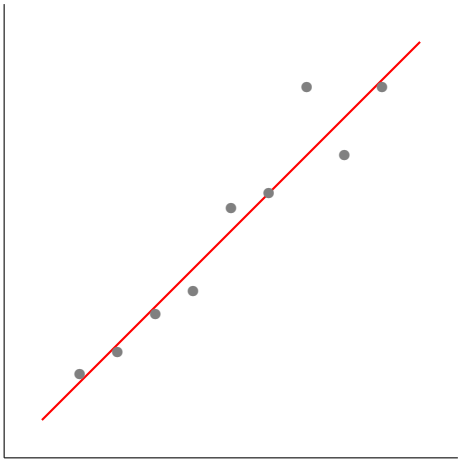
Sia Per $\sigma_x > 0$ poniamo

$$\overline{m} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}.$$

Il grafico della funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \overline{m}(x - \overline{x}) + \overline{y} \end{aligned}$$

è una retta, detta **retta di regressione** di y su x.



Osservazione

1. Se $\sigma_{xy} = 0$ e $\sigma_x > 0$, allora $\overline{m} = 0$ e la retta di regressione è orizzontale.
2. Se $\sigma_{xy} > 0$, ciò indica che y tende a crescere al crescere di x.
3. Se $\sigma_{xy} < 0$, ciò indica che y tende a diminuire al crescere di x.

Coefficiente di correlazione di Pearson Il **coefficiente di correlazione di Pearson**

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \overline{x}^2)(\overline{y^2} - \overline{y}^2)}}$$

è una misura che esprime la forza e la direzione di una relazione lineare tra due variabili continue.

Osservazione Questo coefficiente può variare da -1 a 1, dove:

— $r = 1$ indica una correlazione perfettamente positiva: quando il valore di una variabile aumenta, l'altro valore aumenta in modo proporzionale.

— $r = -1$ indica una correlazione perfettamente negativa: quando il valore di una variabile aumenta, l'altro valore diminuisce in modo proporzionale.

— $r = 0$ indica nessuna correlazione lineare tra le variabili.

Il coefficiente di Pearson misura solo le relazioni lineari tra le variabili, e può non rilevare relazioni non lineari. Inoltre, è sensibile agli **outlier**, ovvero a valori anomali che possono influenzare significativamente il risultato. Quando si analizzano dati, è sempre consigliabile esaminare anche il contesto e considerare altri fattori prima di trarre conclusioni sulla relazione tra le variabili.

Osservazione Spesso si utilizzano dei diagrammi non lineari:

— **Scala bilogaritmica**: la distanza tra i punti lungo l'asse logaritmico è proporzionale al logaritmo dei valori. Questo significa che le distanze crescono in modo esponenziale. Gli incrementi sulla scala logaritmica sono spesso espressi in potenze di 10.

— **Scala semilogaritmica**: solo uno degli assi (solitamente l'asse delle ordinate, y) è in scala logaritmica, mentre l'altro (asse delle ascisse, x) è in scala lineare. Questo è utile quando si desidera visualizzare variazioni logaritmiche su un asse e variazioni lineari sull'altro.

Procedura di interpolazione esponenziale Consideriamo l'osservazione di due caratteri quantitativi, e supponiamo di avere i campioni $x = \{x_1, ..., x_n\}$ e $y = \{y_1, ..., y_n\}$. Vogliamo costruire la funzione esponenziale che meglio rappresenti la correlazione tra questi dati.[1]

Invece di considerare le coppie della forma (x_i, y_i), consideriamo le coppie $(x_i, \log_{10} y_i)$, ed applichiamo ad esse il metodo dei minimi quadrati per calcolare

$$\overline{m} = \frac{\sigma_{x \log_{10} y}}{\sigma_x^2}.$$

Posto $z_i = \log_{10} y_i$ (con $y_i > 0$) e $\overline{z} = \frac{1}{n} \sum_i z_i$, la funzione ottenuta è

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to (0, +\infty), \\ x &\mapsto 10^{\overline{m}(x - \overline{x}) + \overline{z}}. \end{aligned}$$

Osservazione Il grafico di una funzione esponenziale è rappresentato in un diagramma semilogaritmico da una retta.

Procedura di interpolazione potenza Consideriamo l'osservazione di due caratteri quantitativi, e supponiamo di avere i campioni $x = \{x_1, ..., x_n\}$ e $y = \{y_1, ..., y_n\}$. Vogliamo costruire la funzione potenza che meglio rappresenti la correlazione tra questi dati.[2]

Invece di considerare le coppie della forma (x_i, y_i), consideriamo le coppie $(\log_{10} x_i, \log_{10} y_i)$, ed applichiamo ad esse il metodo dei minimi quadrati per calcolare

$$\overline{m} = \frac{\sigma_{\log_{10} x \log_{10} y}}{\sigma^2_{\log_{10} x}}.$$

Posti $u_i = \log_{10} x_i$ e $v_i = \log_{10} y_i$ (con $x_i, y_i > 0$), la funzione ottenuta è

$$\begin{aligned} f : (0, +\infty) &\to (0, +\infty), \\ x &\mapsto 10^{\overline{v} - \overline{m}\,\overline{u}} x^{\overline{m}}. \end{aligned}$$

Osservazione Il grafico di una funzione potenza è rappresentato in un diagramma bilogaritmico da una retta.

[1] È comune utilizzare la funzione esponenziale di base 10. Nulla vieta di utilizzare e o una qualsiasi altra base.
[2] Vedasi nota 1.

Esercizi

Statistica descrittiva

Esercizio 10.1. Nel file `conchiglie.xlsx` sono riportate le misurazioni in lunghezza (in cm) di conchiglie raccolte in un giacimento.

1. Calcolare media, varianza, mediana, ampiezza del range e dell'intervallo interquartile.
2. Disegnare l'istogramma. Che cosa ci mostra di interessante?
3. È stato poi determinato che le ultime 8 conchiglie in realtà appartengono ad un'altra famiglia. Calcolare media, varianza, mediana, ampiezza del range e dell'intervallo interquartile per il campione senza queste ultime misurazioni. Confrontare la variazione della media con quella della mediana e quella del range con quella dell'intervallo interquartile. Disegnare l'istogramma. Che cosa possiamo concludere?

Esercizio 10.2. Nel file `frutti.xlsx` sono riportati i pesi (in grammi) di 120 mele raccolte in un frutteto.

1. Costruire una tabella delle frequenze (assolute, relative e cumulate) raggruppando i dati in classi opportune.
2. Calcolare media, mediana, moda, varianza, deviazione standard, range, primo e terzo quartile e ampiezza dell'intervallo interquartile.
3. Disegnare l'istogramma e il diagramma a scatola.
4. Il produttore esclude dalla vendita le mele più piccole del 5^{o} percentile e più grandi del 95^{o} percentile.
   (a) Determinare tali soglie.
   (b) Ricalcolare media e varianza dopo l'esclusione.
   (c) Commentare l'effetto sul centro e sulla dispersione.

Esercizio 10.3. Un ricercatore annota i tempi (in minuti) di percorrenza casa–università di 50 studenti. I dati sono riportati nel file `casauni.xlsx`.

1. Calcolare media, mediana e moda. Commentare la forma della distribuzione.
2. Calcolare varianza, deviazione standard e range.
3. Si sospetta un errore di trascrizione: un tempo pari a 120 è in realtà 20.
   (a) Ricalcolare media, mediana e varianza dopo la correzione.
   (b) Discutere quali indici sono più sensibili agli outlier.
4. Rappresentare i dati con istogramma e boxplot e commentare.

Esercizio 10.4. La seguente tabella riporta il numero di difetti trovati in 60 prodotti:

Difetti	0	1	2	3	4
Frequenza	14	22	15	7	2

1. Calcolare media, mediana e moda.
2. Calcolare varianza e deviazione standard usando la distribuzione di frequenze.
3. Calcolare primo e terzo quartile.
4. Aggiungere 5 nuovi prodotti, tutti con 0 difetti, e ricalcolare media e varianza. Commentare quali indici cambiano maggiormente.

Esercizio 10.5. Nel file `serraA.xlsx` sono riportate le altezze (in cm) di 80 piantine di basilico.

1. Calcolare media, varianza, deviazione standard, mediana e ampiezza dell'intervallo interquartile.
2. Tracciare l'istogramma e commentarne la simmetria o asimmetria.
3. Si scopre che un sensore ha sovrastimato di 3 cm le ultime 12 misurazioni. Correggere i dati.
4. Ricalcolare gli indici e discutere quali sono invarianti o quali cambiano con una traslazione costante.

Esercizio 10.6. Il file `stipendiA.xlsx` riporta gli stipendi annuali (in migliaia di euro) di 40 dipendenti.

1. Calcolare media, mediana, moda, varianza, deviazione standard, range e intervallo interquartile.
2. Disegnare istogramma e boxplot. Commentare la presenza di outlier.
3. Eliminare gli ultimi due o tre stipendi (manageriali) e ricalcolare media e varianza.
4. Confrontare l'effetto sull'indice di centralità e sulla dispersione.

Esercizio 10.7. Un sondaggio chiede a 120 persone di valutare un prodotto da 1 a 5. Le frequenze osservate sono:

Voto	1	2	3	4	5
Frequenza	5	12	43	40	20

1. Calcolare media, mediana e moda.
2. Calcolare varianza, deviazione standard, range e intervallo interquartile.
3. Aggiungere 10 nuove persone che assegnano voto 1 e ricalcolare gli indici.
4. Commentare perché la media è più sensibile della mediana.

Correlazione e regressione

Modelli lineari

Esercizio 10.8. Nel file `temperature.xlsx` sono riportate le temperature Y (in gradi Fahrenheit) osservate per 60 giorni consecutivi, e le previsioni fatte il giorno prima da due stazioni meteorologiche, X_1 e X_2.

1. Calcolare covarianza e coefficiente di correlazione di Y e X_1. Che cosa dice il coefficiente di Pearson? Se ritenuto opportuno, disegnare la retta di regressione.
2. Calcolare covarianza e coefficiente di correlazione di Y e X_2. Che cosa dice il coefficiente di Pearson? Se ritenuto opportuno, disegnare la retta di regressione.
3. Quale delle due stazioni è da considerarsi più affidabile? Perché?

Esercizio 10.9. Nel file `vendite.xlsx` sono riportati i dati relativi alle vendite mensili Y (in migliaia di euro) di un prodotto e alla spesa pubblicitaria X (in migliaia di euro) sostenuta nello stesso mese per 36 mesi consecutivi.

1. Calcolare covarianza e coefficiente di correlazione tra X e Y.
2. Determinare la retta di regressione lineare di Y su X.
3. Rappresentare i punti in un diagramma di dispersione insieme alla retta di regressione. La relazione sembra appropriata?

4. Si vogliono prevedere le vendite in un mese in cui la spesa pubblicitaria sarà pari a 12 k€. Qual è la stima fornita dal modello?

Esercizio 10.10. Nel file `altezzapeso.xlsx` sono riportati per 50 individui la loro altezza X (in cm) e il loro peso Y (in kg).

1. Calcolare coefficiente di correlazione lineare e covarianza tra altezza e peso.
2. Stimare i parametri della regressione lineare di Y su X.
3. Rappresentare i dati e la retta di regressione. Il modello lineare sembra adeguato?
4. Calcolare i residui e rappresentarli in un grafico: commentare l'eventuale presenza di pattern.

Esercizio 10.11. Nel file `energia.xlsx` sono riportati i consumi energetici Y (in kWh) di un edificio e la temperatura esterna media X (in °C) per 52 settimane consecutive.

1. Calcolare correlazione e covarianza tra temperatura e consumo.
2. Adattare un modello di regressione lineare: ha senso dal punto di vista fisico?
3. Analizzare il grafico dei residui e discutere se vi sia evidenza di non linearità.
4. Proporre, se utile, un modello alternativo (ad esempio regressione quadratica).

Esercizio 10.12. Nel file `reazione.xlsx` sono riportati i tempi di reazione Y (in millisecondi) di 40 soggetti, misurati in condizioni di stress moderato. Per gli stessi soggetti è stato registrato anche il battito cardiaco X (in battiti al minuto).

1. Calcolare la correlazione lineare tra battito cardiaco e tempo di reazione.
2. Verificare mediante diagramma di dispersione se la relazione è lineare o curvilinea.
3. Se opportuno, provare anche un modello di regressione non lineare (ad esempio quadratica) e confrontarne la bontà rispetto al modello lineare.
4. Quale modello risulta più adatto e perché?

Modelli esponenziali

Esercizio 10.13. Un esplosivo è una sostanza che, quando esplode, genera rapidamente calore e gas. È stato misurato il volume del gas (V, in metri cubi) generato da un'esplosione in istanti successivi (t, in minuti) e sono stati riportati i valori ottenuti nel file `gas.xlsx`.

1. Si suppone che V abbia una dipendenza esponenziale da t. Come si può verificare?
2. Interpolare i dati in una funzione esponenziale e riportare dati e funzione in un grafico con scala appropriata.

Esercizio 10.14. Nel file `pressione.xlsx` sono riportati i valori della pressione atmosferica Y (in hPa) misurata a diverse altitudini X (in metri). Si sospetta una relazione esponenziale tra pressione e quota.

1. Verificare la plausibilità di una dipendenza esponenziale tramite un grafico con scala semilogaritmica.
2. Lineare la relazione tramite trasformazione logaritmica e stimare i parametri della regressione.
3. Rappresentare i dati trasformati e la retta di regressione.
4. Riportare infine i dati originali e la curva esponenziale stimata in un unico grafico con scala adeguata.

Modelli di potenza

Esercizio 10.15. Nel file `domandaprezzo.xlsx` sono riportati per un prodotto il prezzo X (in euro) e la quantità venduta Y (in migliaia di unità) in 30 diversi mercati. Si sospetta una relazione di tipo potenza: $Y = aX^p$.

1. Linearizzare il modello e stimare i parametri a e p.
2. Rappresentare dati e regressione in diagramma bilogaritmico.
3. Commentare la significatività del parametro p e il suo significato economico.
4. Verificare graficamente se il modello potenza è ragionevole o se sono presenti deviazioni sistematiche.

Esercizio 10.16. Ragionamenti teorici fanno supporre che il metabolismo R (in kJ per giorni) dipenda dalla massa M (in chilogrammi) secondo una legge potenza $R = aM^p$ o una legge esponenziale $R = ap^M$. Sono stati riportati nel file `metabolismo.xlsx` i valori della massa e del metabolismo per alcuni animali.

1. Determinare la migliore regressione potenza, verificare se è buona e disegnare dati e funzione di regressione in un diagramma bilogaritmico.
2. Determinare la migliore regressione esponenziale, verificare se è buona e disegnare dati e funzione di regressione in un diagramma semilogaritmico.
3. Che cosa possiamo concludere?

Modelli quadratici

Esercizio 10.17. Nel file `velocitamacchina.xlsx` sono riportati per 37 prove la velocità X (in km/h) di una macchina su un circuito e il consumo di carburante Y (in litri per 100 km).

1. Rappresentare i dati in un diagramma di dispersione.
2. Si sospetta una relazione quadratica del tipo $Y = a + bX + cX^2$. Stimare i parametri a, b e c tramite regressione quadratica.
3. Rappresentare la curva di regressione insieme ai dati.
4. Analizzare i residui e discutere se il modello quadratico è adeguato.

Esercizio 10.18. Nel file `temperaturaprodotti.xlsx` sono riportate le temperature X (in °C) e la qualità del prodotto Y (su scala 0–100) in 30 esperimenti di laboratorio.

1. Costruire il diagramma di dispersione di Y in funzione di X.
2. Provare a stimare una regressione quadratica $Y = a + bX + cX^2$.
3. Confrontare il modello quadratico con un modello lineare: quale sembra migliore in termini di adattamento ai dati?
4. Analizzare i residui di entrambi i modelli.

Esercizio 10.19. Nel file `forzatrave.xlsx` sono riportati carichi X (in N) applicati a una trave e le deformazioni Y (in mm) misurate.

1. Rappresentare i dati in un grafico scatterplot.
2. Stimare una regressione quadratica $Y = a + bX + cX^2$ e rappresentare la curva insieme ai dati.
3. Determinare se il termine quadratico c è significativo.
4. Concludere se la relazione tra carico e deformazione è lineare o curvilinea.

Esercizio 10.20. Nel file `temperaturacrescita.xlsx` sono riportate le temperature X (in °C) e le velocità di crescita Y (in mm/giorno) di una pianta sperimentale.

1. Costruire il diagramma di dispersione dei dati.
2. Stimare un modello quadratico $Y = a + bX + cX^2$ e tracciare la curva di regressione.
3. Determinare la temperatura ottimale di crescita (valore di X che massimizza Y) utilizzando il modello quadratico.
4. Analizzare i residui e discutere se il modello è appropriato.

Modelli iperbolici

Esercizio 10.21. Nel file `produzione.xlsx` sono riportati i valori della produzione Y (in tonnellate) di una macchina industriale in funzione della quantità di materia prima utilizzata X (in kg). Si vuole verificare se la produzione segue una legge di saturazione del tipo

$$Y = \frac{aX}{b + X}.$$

1. Mostrare come linearizzare la relazione e identificare i parametri a e b mediante regressione lineare.
2. Rappresentare i dati osservati e la curva stimata.
3. Commentare la bontà dell'adattamento e la plausibilità del modello.

11

Probabilità e distribuzioni continue

11.1 Spazi di probabilità e variabili casuali

Il compito della teoria della probabilità è calcolare la probabilità degli eventi. Ad esempio, se lanciamo un dado cinque volte, quanto è probabile che ottenga un sei più di tre volte?

Per poter calcolare le probabilità, l'esperimento casuale deve essere modellato in modo adeguato.

Eventi elementari I possibili risultati di un esperimento casuale sono chiamati **eventi elementari**. Indichiamo sempre l'insieme degli eventi elementari di un tale esperimento la lettera Ω.[1]

Esempi

1. Risultati quando si lancia un dado una volta:
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$
2. Risultati quando si lancia una moneta una volta:
$$\Omega = \{\text{testa, croce}\}.$$
3. Risultati quando si lancia un dado due volte:
$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ &(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ &(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ &(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}\\ = \{&1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}.\end{aligned}$$

Osservazione Lo stesso esperimento casuale può essere modellato in modi diversi. Per esempio, lo spazio di probabilità può non essere minimale:

— Nel caso dei risultati quando si lancia un dado una volta
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

— Peso in chilogrammi di una persona scelta a caso:
$$\Omega = [0, 1000].$$

[1] In statistica, gli eventi elementari corrispondono alle modalità.

Funzione di probabilità Sia Ω un insieme di eventi elementari. Per semplicità, in questa introduzione scriviamo $\mathscr{P}(\Omega)$ per la famiglia degli eventi. Nei modelli continui, in generale, si lavora invece su una opportuna σ-algebra di sottoinsiemi misurabili di Ω. Una funzione $P\colon \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ è detta **funzione di probabilità** se soddisfa:

1. $P(A) \geqslant 0$ per ogni $A \in \mathscr{P}(\Omega)$.
2. Dati $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathscr{P}(\Omega)$ tali che
$$A_m \cap A_n = \emptyset \quad \text{per ogni } m \neq n,$$
si ha:
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$
dove
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots.$$
3. $P(\Omega) = 1$.

Eventi probabili Il numero $P(A)$ indica quanto è **probabile** che l'evento A si verifichi quando viene eseguito l'esperimento casuale.

1. L'evento impossibile $\emptyset$ ha probabilità 0; viceversa, un evento di probabilità 0 può non essere vuoto.
2. L'evento certo Ω ha probabilità 1; viceversa, un evento di probabilità 1 può non coincidere con Ω.
3. Per ogni evento A vale $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Proprietà Sia Ω un insieme di eventi elementari, e sia $P\colon \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ una funzione di probabilità. Siano $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$. Allora:

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. $P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$.
3. Se $A \cap B = \emptyset$, allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
4. Se $A \subseteq B$, allora $P(A) \leqslant P(B)$.
5. Se $A \subseteq B$, allora $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Probabilità condizionata Sia Ω un insieme di eventi elementari, e sia $P\colon \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ una funzione di probabilità. Siano $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ tali che $P(B) \neq 0$. Definiamo la **probabilità condizionata di A dato B**:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Il numero $P(A|B)$ indica quanto è **probabile** l'evento A se si ipotizza che l'evento B si verifichi.

Osservazioni

1. $P(A|A) = 1$. Infatti:
$$P(A|A) = \frac{P(A \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$$
2. $P(\Omega \setminus A|A) = 0$. Infatti:
$$P(\Omega \setminus A|A) = \frac{P((\Omega \setminus A) \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0.$$
3. $P(A|\Omega) = P(A)$. Infatti:
$$P(A|\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(\Omega)} = \frac{P(A)}{P(\Omega)} = P(A).$$

Esempio Un'azienda di computer acquista 1000 chip di memoria da un'azienda manifatturiera H1 e 4000 chip di memoria da un'altra azienda manifatturiera H2. 100 chip dell'azienda H1 e 200 dell'azienda H2 sono difettosi.

1. Domanda 1: Qual è la probabilità che un chip selezionato a caso dall'azienda H1 sia difettoso?
2. Domanda 2: Qual è la probabilità che un chip selezionato a caso provenga dall'azienda H2 se il chip è difettoso?

Modellazione: Poniamo $\Omega = \{1, 2, \ldots, 5000\}$. Definiamo $P\colon \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ come segue:
$$P\colon \{i\} \mapsto \frac{1}{5000}.$$

Definiamo:
$$A = \{\text{chip dell'azienda H1}\}$$
$$B = \{\text{chip dell'azienda H2}\}$$
$$C = \{\text{chip difettosi}\}.$$

Possiamo quindi provare a rispondere alle domande:

1. Domanda 1:
$$P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{\left(\frac{100}{5000}\right)}{\left(\frac{1000}{5000}\right)} = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10}.$$
2. Domanda 2:
$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\left(\frac{200}{5000}\right)}{\left(\frac{300}{5000}\right)} = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}.$$

Eventi indipendenti Sia Ω un insieme di eventi elementari, e sia $P\colon \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ una funzione di probabilità. Due eventi $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ si dicono **(stocasticamente) indipendenti** se
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Osservazione Se $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ sono indipendenti, allora:

1. $P(A|B) = P(A)$, se $P(B) > 0$,
2. $P(B|A) = P(B)$, se $P(A) > 0$.

Infatti:
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Esempio Una moneta (onesta) viene lanciata 2 volte. Se al primo lancio il risultato è "testa", allora la probabilità che al secondo lancio il risultato sia "croce" è più alta del normale?
Modellazione: Scriviamo

$$\Omega = \{t,c\} \times \{t,c\} = \{(t,t),(t,c),(c,t),(c,c)\},$$
$$P\colon \quad \{(x_1,x_2)\} \mapsto \frac{1}{4}.$$

Poniamo:

$$A = \{\text{al primo lancio esce testa}\} = \{(t,t),(t,c)\},$$
$$B = \{\text{al secondo lancio esce croce}\} = \{(t,c),(c,c)\}.$$

Abbiamo quindi:

$$P(A)\cdot P(B) = P(\{(t,t),(t,c)\})\cdot P(\{(t,c),(c,c)\}) = \frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4} = \frac{1}{4},$$
$$P(A\cap B) = P(\{(t,c)\}) = \frac{1}{4}.$$

In conclusione, i due eventi A e B sono stocasticamente indipendenti. La probabilità dell'evento A non è quindi influenzata dall'ipotesi che B si verifichi (o non si verifichi).

Variabili casuali

— Sia Ω un insieme di eventi elementari, e sia $P\colon \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ una funzione di probabilità. Una funzione $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ è detta **variabile casuale** o **variabile aleatoria**.

— Sia $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \in B\}$. La funzione

$$P_X\colon \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad B \mapsto P(X^{-1}(B))$$

è detta **distribuzione di probabilità** di X.

Scriviamo anche $P(X = a)$ invece di $P_X(\{a\})$.

— La funzione

$$F_X\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a \mapsto P(\{X \leqslant a\}),$$

si chiama **funzione di ripartizione della variabile casuale** X.

Esempio Consideriamo il lancio di un dado:

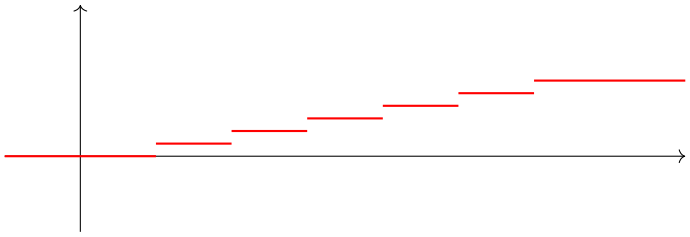
$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\},$$
$$\mathscr{P}(\Omega) = \{\emptyset,\{1\},\dots,\{1,2\},\dots,\{1,2,3\},\dots,\{1,2,3,4\},\dots,\{1,2,3,4,5\},\dots,\Omega\}.$$

Poniamo $X = \mathrm{id}$. Allora:

$$P_X(\{1\}) = \frac{1}{6},$$
$$P_X([1,6]) = 1,$$
$$P_X(\{7\}) = 0,$$
$$P_X((6,+\infty)) = 0.$$

Otteniamo la seguente funzione di ripartizione:

$$F_X\colon a \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } a < 1, \\ \frac{1}{6} & \text{se } 1 \leqslant a < 2, \\ \frac{2}{6} & \text{se } 2 \leqslant a < 3, \\ \frac{3}{6} & \text{se } 3 \leqslant a < 4, \\ \frac{4}{6} & \text{se } 4 \leqslant a < 5, \\ \frac{5}{6} & \text{se } 5 \leqslant a < 6, \\ 1 & \text{se } 6 \leqslant a. \end{cases}$$



Osservazione Se X è una variabile casuale, allora:

$$P_X((a,b]) = F_X(b) - F_X(a).$$

11.2 Distribuzioni continue

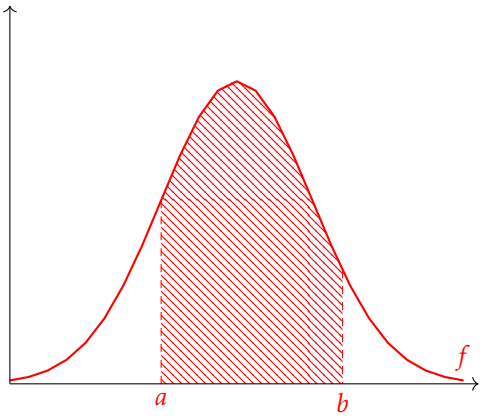
Variabili casuali assolutamente continue Sia X una variabile casuale e sia F_X la sua funzione di ripartizione. Una funzione integrabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è detta **(funzione di) densità di** X se

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Una variabile X che ha densità è detta **assolutamente continua**.

Osservazioni Sia X una variabile casuale con densità f e funzione di ripartizione F_X.

1. Una densità può essere scelta non negativa (quasi ovunque); i suoi valori in singoli punti non incidono sulle probabilità.
2. $\int_a^b f(t)dt = P(X \in [a,b])$.
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = P(X \in \mathbb{R}) = 1$.
4. $F_X' = f$ quasi ovunque; nei punti in cui f è continua vale l'uguaglianza puntuale.

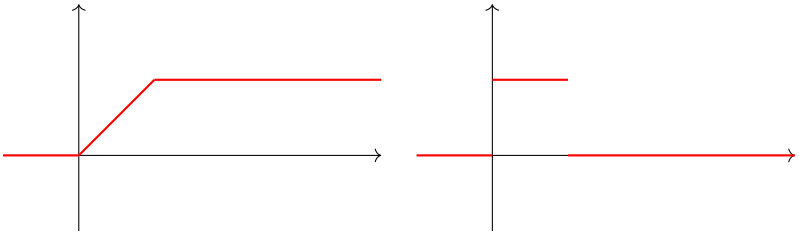


La distribuzione di probabilità uniforme La **distribuzione uniforme** sull'intervallo $[a,b]$, con $a < b$, ha densità f e funzione di ripartizione F_X date da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a, \\ \frac{1}{b-a} & \text{se } a \leqslant x \leqslant b, \\ 0 & \text{se } x > b; \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leqslant x \leqslant b, \\ 1 & \text{se } x > b. \end{cases}$$

Esempio Ad esempio, considerando l'intervallo $[0,1]$:

$$f: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (-\infty, 0), \\ 1 & \text{se } x \in [0,1], \\ 0 & \text{se } x \in (1, +\infty). \end{cases} \qquad F_X: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (-\infty, 0), \\ x & \text{se } x \in [0,1], \\ 1 & \text{se } x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

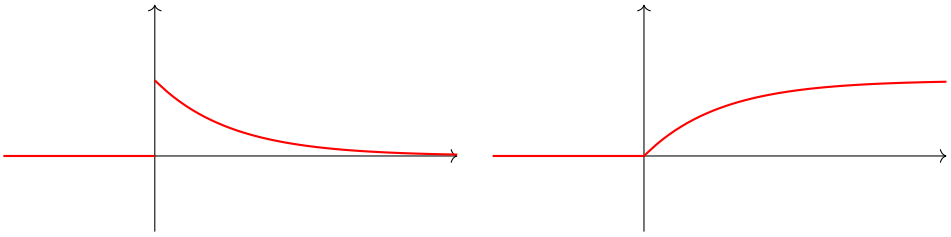


La distribuzione di probabilità esponenziale La **distribuzione di probabilità esponenziale** di parametro $\lambda > 0$ ha le seguenti funzioni di densità e di ripartizione:

$$f: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geqslant 0. \end{cases} \qquad F_X: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{se } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Esempio Ad esempio, considerando $\lambda = 1$:

$$f: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ e^{-x} & \text{se } x \geqslant 0. \end{cases} \qquad F_X: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{se } x \geqslant 0. \end{cases}$$

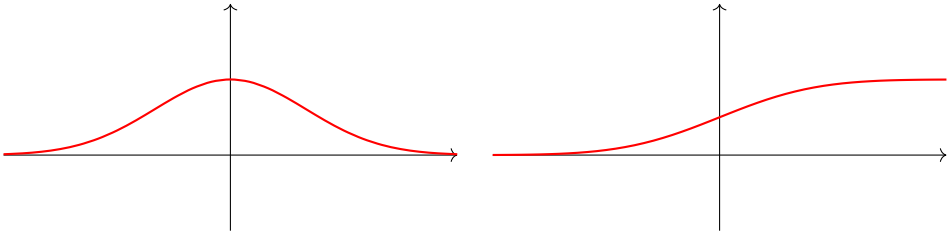


La distribuzione di probabilità normale La **distribuzione di probabilità normale** (o **gaussiana**) di media $\mu \in \mathbb{R}$ e varianza $\sigma^2 > 0$ ha la seguente funzione di densità:

$$N_{\mu,\sigma^2}: x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Esempio La distribuzione normale più utilizzata è la **distribuzione normale standard** $N_{0,1}$. La sua funzione di ripartizione è generalmente indicata con Φ.

$$N_{0,1}: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \qquad \Phi: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$$



Nota Bene: Non è possibile calcolare Φ analiticamente, poiché la funzione $e^{-t^2/2}$ non ha una primitiva esprimibile tramite funzioni elementari.

Osservazione Se abbiamo una distribuzione normale non standard $N_{\mu,\sigma^2}(x)$, allora

$$N_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma} N_{0,1}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Inoltre, la sua funzione di ripartizione è

$$F_{N_{\mu,\sigma^2}} : x \mapsto \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Osservazione Sia X una variabile casuale e sia F_X la sua funzione di ripartizione. Supponiamo che F_X sia continua. Allora, per il teorema dei valori intermedi, l'equazione

$$F_X(x) = \alpha$$

ha sicuramente soluzione per ogni $\alpha \in (0,1)$. Se, inoltre, F_X è strettamente crescente, allora questa soluzione è unica: essa è chiamata **quantile di ordine α di** X e indicata con q_α. Il quantile di ordine $\alpha = \frac{1}{2}$ è detto **mediana**.

Media Sia X una variabile casuale assolutamente continua, e sia f la sua densità. Si dice che X ha **speranza matematica finita** se l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\, dx$$

esiste ed è una quantità finita. In tal caso,

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

è chiamata **speranza matematica** (anche **media** o **attesa**) di X. Spesso si scrive anche μ_X invece di $\mathrm{E}[X]$.

Proprietà Siano X, Y variabili casuali assolutamente continue aventi speranza matematica finita, sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Sia $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione "abbastanza regolare". Allora:

1. La variabile casuale λX ha speranza matematica finita e
$$\mathrm{E}[\lambda X] = \lambda\, \mathrm{E}[X].$$
2. La variabile casuale $X + Y$ ha speranza matematica finita e
$$\mathrm{E}[X+Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y].$$
3. Se X e Y sono indipendenti, allora la variabile casuale XY ha speranza matematica finita e
$$\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y].$$
4. Se $X \geqslant Y$, allora $\mathrm{E}[X] \geqslant \mathrm{E}[Y]$.
5. $|\mathrm{E}[X]| \leqslant \mathrm{E}[|X|]$.
6. La variabile casuale $\varphi(X)$ ha speranza matematica finita se e solo se l'integrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| f(x)\, dx$$
esiste ed è una quantità finita. In tal caso,
$$\mathrm{E}[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot f(x)\, dx.$$

Momenti Sia X una variabile casuale assolutamente continua, e sia $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. Si dice che X ha **momento di ordine k finito** se la variabile casuale X^k ha speranza finita. In tal caso, $\mathrm{E}[X^k]$ è chiamata **momento di ordine k** di X.
2. Si dice che X ha **momento centrato di ordine k finito** se la variabile casuale $(X - \mathrm{E}[X])^k$ ha speranza finita. In tal caso, $\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^k]$ è chiamata **momento centrato di ordine k** di X.
3. Il momento centrato di ordine 2 di X è detto **varianza** di X, e si indica con $\mathrm{Var}(X)$.
4. La quantità $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ è detta **deviazione standard** di X.

Osservazione Sia X una variabile casuale assolutamente continua, e sia f la sua densità. Abbiamo:

$$\mathrm{E}[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx,$$
$$\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{E}[X])^k f(x)\,dx.$$

Covarianza e correlazione Siano X, Y due variabili casuali con momenti secondi finiti. Definiamo la **covarianza** di X e Y:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])] \\ &= \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y).\end{aligned}$$

Se $\sigma_X > 0$ e $\sigma_Y > 0$, definiamo il **coefficiente di correlazione** di X e Y:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Osservazione Il coefficiente di correlazione misura intensità e direzione dell'associazione lineare, non l'indipendenza. È una covarianza normalizzata: cambiando scala alle variabili si ha:

$$\rho_{aX,bY} = \mathrm{sgn}(ab)\,\rho_{X,Y} \qquad (a, b \neq 0).$$

Il coefficiente è invariante per cambi di scala **positivi**; cambia segno se una sola delle due scale viene invertita. La correlazione nulla non implica, in generale, l'indipendenza. Inoltre, $\rho_{X,Y} \in [-1, 1]$.

Osservazioni

1. $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$.
2. Se X e Y sono indipendenti, allora

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = 0$$

Proprietà Siano X, Y due variabili casuali con momenti secondi finiti, sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora:

1. $\mathrm{Var}(\lambda X) = \lambda^2 \mathrm{Var}(X)$.
2. $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$.
   In particolare, se X e Y sono indipendenti, allora $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

Esercizi

Esercizio 11.1. In un esperimento si lanciano due dadi equilibrati e indipendenti.

1. Qual è la probabilità che la somma dei risultati sia 7?
2. Qual è la probabilità che almeno uno dei dadi mostri 6?
3. Sapendo che la somma è 7, qual è la probabilità che il primo dado mostri 4?

Esercizio 11.2. Sia X una variabile casuale uniforme su $[2, 8]$.

1. Scrivere la densità e la funzione di ripartizione di X.
2. Calcolare $P(3 \leqslant X \leqslant 5)$.
3. Determinare $E[X]$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Esercizio 11.3. Sia Z una variabile casuale con distribuzione normale standard.

1. Esprimere $P(Z \leqslant 1)$ e $P(-1 \leqslant Z \leqslant 1)$ mediante la funzione Φ.
2. Determinare il numero $c > 0$ per cui $P(-c \leqslant Z \leqslant c) = 0.95$ usando le tavole in appendice.

Esercizio 11.4. Supponiamo che la durata di un dispositivo, misurata in anni, sia descritta da una variabile casuale esponenziale con parametro $\lambda = 1/4$.

1. Scrivere la funzione di sopravvivenza $P(X > t)$ per $t \geqslant 0$.
2. Calcolare $P(X > 4)$.
3. Calcolare $P(X > 8 \mid X > 4)$ e interpretare il risultato.

12 Convergenza e approssimazione

12.1 Teorema del limite centrale

Teorema del limite centrale Siano $X_1, \dots, X_n$ variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite, con media μ e varianza $0 < \sigma^2 < +\infty$; sia

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Allora la variabile casuale standardizzata soddisfa

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0,1),$$

dove la freccia denota la **convergenza in distribuzione**. Per n sufficientemente grande, la legge di $\overline{X}_n$ si può quindi **approssimare** con una normale di media μ e varianza σ^2/n, anche quando le singole X_i non sono normali. Se invece le X_i sono già normali, tale distribuzione della media è esatta per ogni n.

Osservazione Alcune conseguenze:

1. La funzione di ripartizione di $\overline{X}$:
$$F_{\overline{X}}(x) \approx \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$
2. La probabilità di avere uno scarto tra la media empirica $\overline{X}$ e la media teorica μ:
$$P(|\overline{X} - \mu| \leqslant \delta) \approx 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - 1.$$

Quantili della distribuzione normale φ_α indica il quantile di ordine α di $N_{0,1}$.
In altri termini:

$$\Phi(k) = \alpha \iff k = \varphi_\alpha.$$

Intervallo di fiducia Per stimare una media incognita μ a partire da un campione indipendente $X_1, \dots, X_n$, si considerano la media campionaria $\overline{X}$ e la deviazione standard campionaria s. Fissato un **livello di confidenza** $\gamma \in (0,1)$, un intervallo di confidenza è un intervallo casuale costruito con una procedura che, ripetuta su molti campioni nelle condizioni del modello, contiene il parametro μ in una frazione γ dei casi.

Se i dati provengono da una popolazione normale con varianza ignota, l'intervallo bilaterale è

$$\left[\overline{X} - t_{n-1,(1+\gamma)/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \quad \overline{X} + t_{n-1,(1+\gamma)/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right],$$

dove $t_{\nu,p}$ è il quantile di ordine p della distribuzione t con ν gradi di libertà. Il rapporto $s/\sqrt{n}$ è l' **errore standard stimato della media**. Per campioni grandi, sotto condizioni appropriate, il quantile della t si può approssimare con quello normale $\varphi_{(1+\gamma)/2}$. Il livello γ riguarda la procedura, non la probabilità che un parametro fisso appartenga a uno specifico intervallo già calcolato.

Esempio Si sospetta che un dado sia truccato. In 900 lanci, il numero 1 è uscito 165 volte. Se il dado fosse onesto, in 900 lanci il numero 1 dovrebbe uscire mediamente

$$900 \cdot \frac{1}{6} = 150$$

volte, dunque effettivamente il numero osservato è un po' più grande della media.

Si tratta di una differenza significativa? Abbiamo

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 165) &= 1 - P(X \leqslant 164) \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{164.5/n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi(1.297) \\ &\approx 1 - 0.903 \\ &= 0.097 \\ &= 9.7\%. \end{aligned}$$

Il dato è un po' sospetto, ma non troppo...

Potremmo allora chiederci, ad esempio: quante volte almeno deve uscire 1 affinché, sotto l'ipotesi di un dado onesto, la probabilità di osservarne almeno altrettante sia al più l'1%? In altre parole, vogliamo trovare k tale che

$$P(X \geqslant k) \leqslant 0.01.$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} P(X \geqslant k) &= 1 - P(X \leqslant k-1) \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{(k-1+0.5)/n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{k-150.5}{5\sqrt{5}}\right). \end{aligned}$$

Quindi si tratta di risolvere:

$$\Phi\left(\frac{k-150.5}{5\sqrt{5}}\right) \geqslant 0.99.$$

Poiché $\varphi_{0.99} \approx 2.33$, ciò diventa:

$$\frac{k-150.5}{5\sqrt{5}} \geqslant 2.33,$$

da cui $k \geqslant 176.55$. In conclusione, servono almeno 177 uscite del numero 1 per rigettare, con questo criterio approssimato e in un test unilaterale al livello 1%, l'ipotesi che il dado sia onesto. Il livello del test non è la probabilità che il dado sia truccato.

12.2 Test di ipotesi

Un **test statistico** verifica se i dati siano compatibili con una **ipotesi nulla** H_0, contrapposta a un'**ipotesi alternativa** H_1. Il procedimento consiste nello scegliere una statistica test, nel determinarne la distribuzione sotto H_0 e nel fissare, prima di osservare i risultati, un **livello di significatività** $\alpha \in (0,1)$. La **regione critica** contiene i valori della statistica per i quali si rigetta H_0. Sotto H_0, la probabilità di rigetto indebito (**errore di I tipo**) non supera α. Se il valore osservato non appartiene alla regione critica, si dice che **non si rigetta** H_0: ciò non dimostra che l'ipotesi sia vera.

Code Un test è **bilaterale** quando interessa uno scostamento in entrambe le direzioni (per esempio $\mu \neq \mu_0$); è **unilaterale** quando l'alternativa privilegia una direzione ($\mu > \mu_0$ o $\mu < \mu_0$). La scelta non dipende dal segno della statistica utilizzata.

12.2.1 Test Z

Test Z

— **Ipotesi nulla**: Un certo campione $X_1, ..., X_n$ è coerente con un fenomeno di media μ e varianza σ^2.

— **Condizioni**: la varianza teorica σ^2 è nota; la normalità della media è esatta con dati normali e approssimata per campioni sufficientemente grandi, sotto le ipotesi del teorema del limite centrale.

— **Quantità pivotale**:

$$Q = |Z| = \left| \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right|.$$

Osservazione Per il test bilaterale al livello α si rigetta H_0 quando $|Z| > \varphi_{1-\alpha/2}$, perché per $Z \sim N(0,1)$ si ha

$$P(|Z| > k) = 2\Big(1 - \Phi(k)\Big).$$

I valori di soglia usuali sono:

α	$\varphi_{1-\alpha/2}$
$0.10 = 10\%$	1.645
$0.05 = 5\%$	1.960
$0.01 = 1\%$	2.576

Esempio Vogliamo determinare, con un livello di significatività del 5%, se una moneta è truccata o meno. Quindi:

Ipotesi nulla: "La moneta è onesta."
ovvero
Ipotesi nulla: "Dato un numero sufficientemente grande n di lanci, i dati si distribuiscono secondo una distribuzione N_{μ,σ^2}, dove μ e σ corrispondono rispettivamente alla media e alla deviazione standard teoriche di una moneta onesta."

Consideriamo la variabile aleatoria

$$\begin{aligned} X\colon \mathit{testa} &\mapsto 1, \\ \mathit{croce} &\mapsto 0. \end{aligned}$$

Calcoliamo la media e la deviazione standard teoriche di una moneta onesta:

$$\mu = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} = 0.5.$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

Ponendo il livello di affidabilità $\alpha = 0.05$, abbiamo $k \approx 1.960$.

Esempio 1: Dopo $n = 30$ lanci, ottengo 25 volte testa e 5 volte croce. La media empirica è dunque:

$$\overline{X} = \frac{25 \cdot 1 + 5 \cdot 0}{30} = \frac{5}{6} \approx 0.83,$$

che sembra lontana dalla media teorica...

Calcolo il valore del test Z:

$$|Z| = \left| \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right| = \left| \frac{\frac{5}{6} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}/\sqrt{30}} \right| \approx 3.65 > 1.960.$$

L'ipotesi nulla è quindi rigettata al livello di significatività del 5%: il risultato osservato sarebbe poco compatibile con una moneta onesta.

Esempio 2: Dopo $n = 900$ lanci, ottengo 423 volte testa e 477 volte croce. La media empirica è dunque:

$$\overline{X} = \frac{423 \cdot 1 + 477 \cdot 0}{900} = \frac{47}{100} = 0.47,$$

che sembra abbastanza vicina alla media teorica.

Calcolo il valore del test Z:

$$|Z| = \left| \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right| = \left| \frac{0.47 - 0.5}{0.5/\sqrt{900}} \right| \approx 1.800 < 1.960.$$

L'ipotesi nulla non viene rigettata al livello di significatività del 5%: questi dati non forniscono evidenza sufficiente per concludere che la moneta sia truccata.

12.2.2 Test t di Student

Test t di Student

— **Ipotesi nulla**: Un certo campione $X_1, ..., X_n$ è coerente con un fenomeno di media μ.

— **Condizioni**: i dati sono indipendenti e provengono da una popolazione normale (per un test esatto); per campioni grandi sono possibili approssimazioni, sotto opportune ipotesi.

— **Quantità pivotale**:

$$Q = |T_{n-1}| = \left| \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \right|.$$

Gradi di libertà I **gradi di libertà** del test sono $\nu = n-1$. Per il test **bilaterale** al livello di significatività α, si rigetta H_0 quando $|T_{n-1}| > t_{\nu,1-\alpha/2}$. La tabella seguente riporta i valori critici bilaterali:

$\nu\backslash\alpha$	0.10	0.05	0.01
1	6.314	12.706	63.657
2	2.920	4.303	9.925
3	2.353	3.182	5.841
4	2.132	2.776	4.604
5	2.015	2.571	4.032
6	1.943	2.447	3.707
7	1.895	2.365	3.499
8	1.860	2.306	3.355
9	1.833	2.262	3.250
10	1.812	2.228	3.169
11	1.796	2.201	3.106
12	1.782	2.179	3.055
13	1.771	2.160	3.012
14	1.761	2.145	2.977
15	1.753	2.131	2.947
16	1.746	2.120	2.921
17	1.740	2.110	2.898
18	1.734	2.101	2.878
19	1.729	2.093	2.861
20	1.725	2.086	2.845
21	1.721	2.080	2.831
22	1.717	2.074	2.819
23	1.714	2.069	2.807
24	1.711	2.064	2.797
25	1.708	2.060	2.787
26	1.706	2.056	2.779
27	1.703	2.052	2.771
28	1.701	2.048	2.763
29	1.699	2.045	2.756
30	1.697	2.042	2.750
40	1.684	2.021	2.704
60	1.671	2.000	2.660
80	1.664	1.990	2.639
100	1.660	1.984	2.626
1000	1.646	1.962	2.581

Per i quantili della t è disponibile anche la tabella in appendice; in quella tabella la percentuale in intestazione indica la **probabilità in una sola coda** e, per un test bilaterale, va utilizzata la colonna corrispondente a $\alpha/2$.

Esempio Il proprietario di un'azienda vinicola teme che il tasso alcolico del suo vino quest'anno non sia più pari a 12.5%. Misurando il tasso alcolico di 6 bottiglie, ottiene i seguenti valori:

$$11.5, \quad 11.0, \quad 12.5, \quad 13.1, \quad 12.7, \quad 12.4.$$

Si suppone che il tasso alcolico segua una distribuzione normale.

Abbiamo:

Ipotesi nulla: "Il tasso alcolico del vino è 12.5%."

ovvero

Ipotesi nulla: "I dati si distribuiscono secondo una distribuzione normale con media $\mu = 12.5$."

Consideriamo la variabile aleatoria $X = \mathrm{id}$.

Ponendo il livello di affidabilità $\alpha = 0.05$, dato $\nu = 6 - 1 = 5$ abbiamo $k \approx 2.571$.

Calcoliamo il valore del test t:

$$|T_{n-1}| = \left|\frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}\right| \approx \left|\frac{12.2 - 12.5}{0.79/\sqrt{6}}\right| \approx 0.93 < 2.571.$$

Quindi l'ipotesi nulla non viene rigettata al livello del 5%.

Deviazione standard campionaria combinata Dati due campioni $X_1,...,X_n$ e $Y_1,...,Y_m$, la loro **deviazione standard campionaria combinata** è

$$s_{X,Y} = \sqrt{\frac{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}{n+m-2}}.$$

Test t di Student per il confronto di due campioni

— **Ipotesi nulla**: Le due popolazioni da cui sono estratti i campioni $X_1,\dots,X_n$ e $Y_1,\dots,Y_m$ hanno la stessa media.

— **Condizioni**: I campioni devono avere una distribuzione normale di uguale varianza, e devono essere estratti indipendentemente.

— **Quantità pivotale**:

$$Q = |T_{n+m-2}| = \left| \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{s_{X,Y}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \right|.$$

Osservazione In questo caso, abbiamo $\nu = n+m-2$, e possiamo sempre utilizzare la tabella riportata precedentemente.

Osservazione Se $m = n$, otteniamo:

$$Q = |T_{2(n-1)}| = \left| \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{s_X^2 + s_Y^2}/\sqrt{n}} \right|.$$

12.2.3 Test F di Fisher

Test F di Fisher (analisi della varianza a una via) Consideriamo $m \geqslant 2$ gruppi indipendenti di uguale numerosità $n \geqslant 2$, con osservazioni X_{ij} $(i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n)$, medie campionarie $\overline{X}_i$ e varianze campionarie s_i^2. Sia $\overline{X}$ la media di tutte le mn osservazioni.

— **Ipotesi nulla**: le medie delle m popolazioni sono uguali.

— **Condizioni**: campioni indipendenti, popolazioni normali, varianze delle popolazioni uguali.

— **Statistica test**:

$$F = \frac{\frac{n}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(\overline{X}_i - \overline{X})^2}{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} s_i^2}.$$

Sotto H_0, la statistica segue una distribuzione F di Fisher con $\nu_{\text{num}} = m-1$ e $\nu_{\text{den}} = m(n-1)$ gradi di libertà. Si rigetta per valori **grandi** di F, confrontandoli con i quantili della distribuzione appropriata. Il test riguarda l'uguaglianza delle **medie**, non dimostra l'identità delle popolazioni.

12.2.4 Test χ^2

Test χ^2

— **Ipotesi nulla**: I risultati di n esperimenti con k modalità sono coerenti con il modello che prevede che la modalità i-esima abbia probabilità p_i per ogni $i \leqslant k$.

— **Condizioni**: Gli esperimenti devono essere indipendenti tra loro, e n deve soddisfare $n \cdot p_i > 5$ per ogni $i \leqslant k$.

— **Quantità pivotale**:

$$Q = \chi^2_{k-1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - np_i)^2}{p_i}.$$

Osservazione In questo caso, abbiamo $\nu = k - 1$ gradi di libertà. Anche per questo caso sono disponibili tavole con i valori critici per i diversi livelli di significatività.

Esercizi

Per alcuni esercizi di questo capitolo sono necessari i fogli di dati citati nel testo, non inclusi negli allegati forniti.

Esercizio 12.1. Nel file `cavendish.xlsx` sono riportate le misurazioni della densità della Terra effettuate da Cavendish nel 1798. Il valore riportato è in multipli della densità dell'acqua. Il valore accettato oggigiorno per la densità della Terra è 5.517 volte quella dell'acqua.

1. Calcolare media e mediana delle osservazioni di Cavendish.
2. Ci si è accorti in seguito che il settimo valore riportato, 5.88, era in realtà 4.88. Quanto valgono ora media e mediana? Disegnare l'istogramma per i dati corretti.
3. Calcolare l'intervallo di fiducia di livello 95% per il valore della densità della Terra. Il valore oggi accettato si trova all'interno dell'intervallo?

Esercizio 12.2. Nel file `latte.xlsx` sono riportati i numeri di coliformi (su una scala logaritmica) che conteggiati nei campioni di latte.

1. Calcolare media, varianza e mediana.
2. Calcolare un intervallo di confidenza al 95% per la media dei conteggi (su scala logaritmica) di coliformi, assumendo una distribuzione normale. Interpretare i risultati.
3. Gli outlier possono essere un problema nell'analisi statistica. Qui è osservato un valore di 9.1 che è molto più grande rispetto alle altre osservazioni. Quale sarebbe l'effetto della rimozione di questa osservazione sull'analisi?[1]

Esercizio 12.3. Nel file `batteri.xlsx` sono riportati i conteggi di batteri in due diversi tipi di terreno (A e B) prelevati da 20 campioni ciascuno. Assumendo che i dati siano distribuiti normalmente:

1. Calcolare media e deviazione standard dei conteggi per ciascun tipo di terreno.
2. Verificare, con un test t per campioni indipendenti e livello di significatività del 5%, se i due tipi di terreno differiscono significativamente in termini di conteggi di batteri.

Esercizio 12.4. Per confrontare le dimensioni dei pesci in diversi anni, alcuni ricercatori hanno campionato il merluzzo atlantico nel 1985 (15 pesci) e nuovamente nel 2005 (17 pesci). In entrambi gli anni sono state registrate le lunghezze dei pesci (tra le altre variabili). Nel file `merluzzo.xlsx` sono riportati i risultati dello studio con le lunghezze in centimetri.

1. Calcolare la media, la varianza e la mediana per il merluzzo atlantico nei due anni, rispettivamente.
2. Utilizzando un test appropriato, verificare se la lunghezza del merluzzo atlantico differisce significativamente in questi due anni. Assumere che le varianze siano uguali e che i dati siano distribuiti normalmente.

Esercizio 12.5. Nel file `semi.xlsx` sono riportati i pesi di 30 semi di una pianta prima e dopo un trattamento chimico.

1. Calcolare media, deviazione standard e mediana dei pesi prima e dopo il trattamento.
2. Utilizzare un test t per campioni appaiati al livello di significatività del 5% per verificare se il trattamento ha modificato significativamente il peso dei semi.

[1] N.B.! Nella realtà non dovremmo mai rimuovere osservazioni a meno che non ci sia una buona motivazione, ad esempio, un guasto dello strumento di misura o un errore umano nella misurazione. Inoltre, se il valore è completamente irragionevole, può essere rimosso, ad esempio, un peso di -3.

Esercizio 12.6. La massa delle uova (in grammi) è studiata in una fattoria e per questo è stato prelevato un campione di 23 uova. Le misurazioni sono riportate nel file `uova.xlsx`. Si può assumere che i pesi delle uova siano distribuiti normalmente.

1. Calcolare primo, secondo e terzo quartile.
2. Calcola un intervallo di confidenza al 99% per i pesi delle uova. Interpretare l'intervallo.
3. Dopo che questo studio è stato completato, la fattoria ha iniziato a utilizzare una nuova dieta per i polli nella speranza che le uova potessero aumentare di dimensioni e peso. Due anni dopo è stato condotto un nuovo studio e sono state misurate 25 uova. Ciò ha portato a una media del peso delle uova di 55.65 e una deviazione standard di 8.73. Confronta i pesi medi delle uova dei due studi utilizzando un test statistico appropriato al livello di significatività del 5%.

Esercizio 12.7. In uno studio sugli alberi, sono state esaminate 4 diverse aree climatiche, ed è stato annotato il grado di affetto degli alberi su una scala con 3 livelli (sano, leggermente affetto, malato). Le misurazioni sono riportate nel file `alberi.xlsx`.

1. Calcolare le frequenze relative (scritte come percentuale), e disegnare l'istogramma di ogni area climatica.
2. Testare se c'è un'associazione tra le aree climatiche e lo stato di salute degli alberi con un test appropriato.

Esercizio 12.8. Nel file `frutta.xlsx` sono riportati i gusti preferiti di 200 persone tra mele, banane e pere, suddivisi per genere (maschi/femmine).

1. Costruire una tabella di contingenza tra genere e frutto preferito.
2. Verificare con un test chi-quadrato al 5% se c'è associazione tra genere e frutto preferito.
3. Descrivere quale frutto è più preferito da ciascun genere.

Esercizio 12.9. Un istituto di ricerca di mercato effettua un sondaggio per indagare se 'Systembolaget' dovrebbe essere abolito. Viene estratto un campione di 1000 persone dalla popolazione svedese maggiore di 18 anni. Viene presentata la seguente affermazione:

> Systembolaget dovrebbe essere abolito.

Vengono anche registrati il genere dei partecipanti e i risultati sono riportati nel file `systembolaget.xlsx`.

1. Verificare, con un livello di significatività del 5%, se il genere e l'atteggiamento sono indipendenti.
2. Un anno dopo, la stessa domanda viene posta in un sondaggio, ma sono ammesse diverse alternative come risposte. I risultati ottenuti sono sempre riportati nel file `data.xlsx`. Verificare, con un livello di significatività del 5%, se il genere e l'atteggiamento sono indipendenti.
3. Descrivere i risultati in termini di quale genere è più d'accordo/in disaccordo.

Parte III

Appendice

A

Tavole dei valori di soglia per i test statistici

Raccogliamo qui le tavole utili per il calcolo dei valori di soglia per i test statistici.

Funzione di ripartizione $\Phi(x)$ della normale standard

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Test t di Student

ν	40.0%	33.3%	25.0%	20.0%	12.5%	10.0%	5.0%	2.5%	1.0%	0.5%	0.1%
1	0.325	0.577	1.000	1.376	2.414	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31
2	0.289	0.500	0.816	1.061	1.604	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	0.277	0.476	0.765	0.978	1.423	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4	0.271	0.464	0.741	0.941	1.344	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.267	0.457	0.727	0.920	1.301	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.265	0.453	0.718	0.906	1.273	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.263	0.449	0.711	0.896	1.254	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.262	0.447	0.706	0.889	1.240	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.261	0.445	0.703	0.883	1.230	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.260	0.444	0.700	0.879	1.221	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.260	0.443	0.697	0.876	1.214	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.259	0.442	0.695	0.873	1.209	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.259	0.441	0.694	0.870	1.204	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.258	0.440	0.692	0.868	1.200	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.258	0.439	0.691	0.866	1.197	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.258	0.439	0.690	0.865	1.194	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.257	0.438	0.689	0.863	1.191	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.257	0.438	0.688	0.862	1.189	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.257	0.438	0.688	0.861	1.187	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.257	0.437	0.687	0.860	1.185	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.257	0.437	0.686	0.859	1.183	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.256	0.437	0.686	0.858	1.182	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.256	0.436	0.685	0.858	1.180	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.256	0.436	0.685	0.857	1.179	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.256	0.436	0.684	0.856	1.178	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.256	0.436	0.684	0.856	1.177	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.256	0.435	0.684	0.855	1.176	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.256	0.435	0.683	0.855	1.175	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.256	0.435	0.683	0.854	1.174	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.256	0.435	0.683	0.854	1.173	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
35	0.255	0.434	0.682	0.852	1.170	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
40	0.255	0.434	0.681	0.851	1.167	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
45	0.255	0.434	0.680	0.850	1.165	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281
50	0.255	0.433	0.679	0.849	1.164	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
55	0.255	0.433	0.679	0.848	1.163	1.297	1.673	2.004	2.396	2.668	3.245
60	0.254	0.433	0.679	0.848	1.162	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
∞	0.253	0.431	0.674	0.842	1.150	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

Test F di Fisher

$\nu_{den}\backslash\nu_{num}$	α	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
1	50.0%	1.50	1.71	1.82	1.89	1.94	1.98	2.00	2.04	2.07	2.09	2.12	2.15	2.17	2.20
	40.0%	2.63	2.93	3.09	3.20	3.27	3.32	3.36	3.41	3.45	3.48	3.52	3.56	3.59	3.64
	33.3%	4.00	4.42	4.64	4.78	4.88	4.95	5.00	5.08	5.13	5.18	5.24	5.29	5.33	5.39
	25.0%	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10	9.19	9.32	9.41	9.50	9.58	9.67	9.74	9.85
	20.0%	12.0	13.1	13.6	14.0	14.3	14.4	14.6	14.8	14.9	15.0	15.2	15.3	15.4	15.6
	10.0%	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	59.1	59.7	60.5	61.0	61.5	62.0	62.6	63.0	63.3
	5.0%	199.	216.	225.	230.	234.	237.	239.	242.	244.	246.	248.	250.	252.	254.
	2.5%	800.	864.	900.	922.	937.	948.	957.	969.	977.	985.	993.			
	1.0%														
	0.1%														
2	50.0%	1.00	1.13	1.21	1.25	1.28	1.30	1.32	1.35	1.36	1.38	1.39	1.41	1.42	1.44
	40.0%	1.50	1.64	1.72	1.76	1.80	1.82	1.84	1.86	1.88	1.89	1.91	1.92	1.94	1.96
	33.3%	2.00	2.15	2.22	2.27	2.30	2.33	2.34	2.37	2.38	2.40	2.42	2.43	2.45	2.47
	25.0%	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34	3.35	3.38	3.39	3.41	3.43	3.44	3.46	3.48
	20.0%	4.00	4.16	4.24	4.28	4.32	4.34	4.36	4.38	4.40	4.42	4.43	4.45	4.47	4.48
	10.0%	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.39	9.41	9.43	9.44	9.46	9.47	9.49
	5.0%	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5
	2.5%	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5
	1.0%	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	100.	100.	100.	100.	100.	100.	100.	99.5
	0.1%	999.	999.												
3	50.0%	0.88	1.00	1.06	1.10	1.13	1.15	1.16	1.18	1.20	1.21	1.23	1.24	1.25	1.27
	40.0%	1.26	1.37	1.43	1.47	1.49	1.51	1.52	1.54	1.55	1.56	1.57	1.58	1.59	1.60
	33.3%	1.62	1.72	1.77	1.80	1.82	1.83	1.84	1.86	1.87	1.88	1.89	1.90	1.90	1.91
	25.0%	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.43	2.44	2.44	2.45	2.46	2.46	2.47	2.47	2.47
	20.0%	2.89	2.94	2.96	2.97	2.97	2.97	2.98	2.98	2.98	2.98	2.98	2.98	2.98	2.98
	10.0%	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.23	5.22	5.20	5.18	5.17	5.15	5.13
	5.0%	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.79	8.74	8.70	8.66	8.62	8.58	8.53
	2.5%	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.4	14.3	14.3	14.2	14.1	14.0	13.9
	1.0%	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.2	27.1	26.9	26.7	26.5	26.4	26.1
	0.1%	149.	141.	137.	135.	133.	132.	131.	129.	128.	127.	126.	125.	125.	123.
4	50.0%	0.83	0.94	1.00	1.04	1.06	1.08	1.09	1.11	1.13	1.14	1.15	1.16	1.18	1.19
	40.0%	1.16	1.26	1.31	1.34	1.36	1.37	1.38	1.40	1.41	1.42	1.43	1.43	1.44	1.45
	33.3%	1.46	1.55	1.58	1.61	1.62	1.63	1.64	1.65	1.65	1.66	1.67	1.67	1.68	1.68
	25.0%	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08
	20.0%	2.47	2.48	2.48	2.48	2.47	2.47	2.47	2.46	2.46	2.45	2.44	2.44	2.43	2.43
	10.0%	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.92	3.90	3.87	3.84	3.82	3.79	3.76
	5.0%	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	5.96	5.91	5.86	5.80	5.75	5.70	5.63
	2.5%	10.6	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.84	8.75	8.66	8.56	8.46	8.38	8.26
	1.0%	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.5	14.4	14.2	14.0	13.8	13.7	13.5
	0.1%	61.2	56.2	53.4	51.7	50.5	49.7	49.0	48.0	47.4	46.8	46.1	45.4	44.9	44.1
5	50.0%	0.80	0.91	0.96	1.00	1.02	1.04	1.05	1.07	1.09	1.10	1.11	1.12	1.13	1.15
	40.0%	1.11	1.20	1.24	1.27	1.29	1.30	1.31	1.32	1.33	1.34	1.34	1.35	1.36	1.37
	33.3%	1.38	1.45	1.48	1.50	1.51	1.52	1.53	1.53	1.54	1.54	1.54	1.55	1.55	1.55
	25.0%	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.88	1.88	1.88	1.87
	20.0%	2.26	2.25	2.24	2.23	2.22	2.21	2.20	2.19	2.18	2.18	2.17	2.16	2.15	2.13
	10.0%	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.30	3.27	3.24	3.21	3.17	3.15	3.10
	5.0%	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.74	4.68	4.62	4.56	4.50	4.44	4.36
	2.5%	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.62	6.52	6.43	6.33	6.23	6.14	6.02
	1.0%	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.1	9.89	9.72	9.55	9.38	9.24	9.02
	0.1%	37.1	33.2	31.1	29.8	28.8	28.2	27.6	26.9	26.4	25.9	25.4	24.9	24.4	23.8

Test F di Fisher

$\nu_{den}\backslash\nu_{num}$		2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
	α														
6	50.0%	0.78	0.89	0.94	0.98	1.00	1.02	1.03	1.05	1.06	1.07	1.08	1.10	1.11	1.12
	40.0%	1.07	1.16	1.20	1.22	1.24	1.25	1.26	1.27	1.28	1.29	1.29	1.30	1.31	1.31
	33.3%	1.33	1.39	1.42	1.44	1.44	1.45	1.45	1.46	1.46	1.47	1.47	1.47	1.47	1.47
	25.0%	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78	1.78	1.77	1.77	1.76	1.76	1.75	1.75	1.74
	20.0%	2.13	2.11	2.09	2.08	2.06	2.05	2.04	2.03	2.02	2.01	2.00	1.98	1.97	1.95
	10.0%	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.94	2.90	2.87	2.84	2.80	2.77	2.72
	5.0%	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.06	4.00	3.94	3.87	3.81	3.75	3.67
	2.5%	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.46	5.37	5.27	5.17	5.07	4.98	4.85
	1.0%	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.87	7.72	7.56	7.40	7.23	7.09	6.88
	0.1%	27.0	23.7	21.9	20.8	20.0	19.5	19.0	18.4	18.0	17.6	17.1	16.7	16.3	15.7
7	50.0%	0.77	0.87	0.93	0.96	0.98	1.00	1.01	1.03	1.04	1.05	1.07	1.08	1.09	1.10
	40.0%	1.05	1.13	1.17	1.19	1.21	1.22	1.23	1.24	1.24	1.25	1.26	1.26	1.27	1.27
	33.3%	1.29	1.35	1.38	1.39	1.40	1.40	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	1.42	1.42	1.42
	25.0%	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.69	1.68	1.68	1.67	1.66	1.66	1.65
	20.0%	2.04	2.02	1.99	1.97	1.96	1.94	1.93	1.92	1.91	1.89	1.88	1.86	1.85	1.83
	10.0%	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.70	2.67	2.63	2.59	2.56	2.52	2.47
	5.0%	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.64	3.57	3.51	3.44	3.38	3.32	3.23
	2.5%	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.76	4.67	4.57	4.47	4.36	4.28	4.14
	1.0%	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.62	6.47	6.31	6.16	5.99	5.86	5.65
	0.1%	21.7	18.8	17.2	16.2	15.5	15.0	14.6	14.1	13.7	13.3	12.9	12.5	12.2	11.7
8	50.0%	0.76	0.86	0.91	0.95	0.97	0.99	1.00	1.02	1.03	1.04	1.05	1.07	1.07	1.09
	40.0%	1.03	1.11	1.15	1.17	1.19	1.20	1.20	1.21	1.22	1.22	1.23	1.24	1.24	1.25
	33.3%	1.26	1.32	1.35	1.36	1.36	1.37	1.37	1.37	1.37	1.38	1.38	1.38	1.37	1.37
	25.0%	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.64	1.63	1.62	1.62	1.61	1.60	1.59	1.58
	20.0%	1.98	1.95	1.92	1.90	1.88	1.87	1.86	1.84	1.83	1.81	1.80	1.78	1.76	1.74
	10.0%	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.54	2.50	2.46	2.42	2.38	2.35	2.29
	5.0%	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.35	3.28	3.22	3.15	3.08	3.02	2.93
	2.5%	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.29	4.20	4.10	4.00	3.89	3.81	3.67
	1.0%	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.81	5.67	5.52	5.36	5.20	5.07	4.86
	0.1%	18.5	15.8	14.4	13.5	12.9	12.4	12.0	11.5	11.2	10.8	10.5	10.1	9.80	9.33
9	50.0%	0.75	0.85	0.91	0.94	0.96	0.98	0.99	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.08
	40.0%	1.02	1.10	1.13	1.15	1.17	1.18	1.18	1.19	1.20	1.21	1.21	1.22	1.22	1.22
	33.3%	1.24	1.30	1.32	1.33	1.34	1.34	1.34	1.34	1.35	1.35	1.35	1.34	1.34	1.34
	25.0%	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53
	20.0%	1.93	1.90	1.87	1.85	1.83	1.81	1.80	1.78	1.76	1.75	1.73	1.71	1.70	1.67
	10.0%	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.22	2.16
	5.0%	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.14	3.07	3.01	2.94	2.86	2.80	2.71
	2.5%	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	3.96	3.87	3.77	3.67	3.56	3.47	3.33
	1.0%	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.26	5.11	4.96	4.81	4.65	4.52	4.31
	0.1%	16.4	13.9	12.6	11.7	11.1	10.7	10.4	9.89	9.57	9.24	8.90	8.55	8.26	7.81
10	50.0%	0.74	0.85	0.90	0.93	0.95	0.97	0.98	1.00	1.01	1.02	1.03	1.05	1.06	1.07
	40.0%	1.01	1.08	1.12	1.14	1.15	1.16	1.17	1.18	1.18	1.19	1.19	1.20	1.20	1.21
	33.3%	1.23	1.28	1.30	1.31	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.31
	25.0%	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.50	1.48
	20.0%	1.90	1.86	1.83	1.80	1.78	1.77	1.75	1.73	1.72	1.70	1.68	1.66	1.65	1.62
	10.0%	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.32	2.28	2.24	2.20	2.16	2.12	2.06
	5.0%	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	2.98	2.91	2.84	2.77	2.70	2.64	2.54
	2.5%	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.72	3.62	3.52	3.42	3.31	3.22	3.08
	1.0%	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.85	4.71	4.56	4.41	4.25	4.11	3.91
	0.1%	14.9	12.6	11.3	10.5	9.93	9.52	9.20	8.75	8.45	8.13	7.80	7.47	7.19	6.76

Test F di Fisher

$\nu_{den}\backslash\nu_{num}$		2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
	α														
11	50.0%	0.74	0.84	0.89	0.93	0.95	0.96	0.98	0.99	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06
	40.0%	1.00	1.07	1.11	1.13	1.14	1.15	1.16	1.17	1.17	1.18	1.18	1.18	1.19	1.19
	33.3%	1.22	1.27	1.29	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.29
	25.0%	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.45
	20.0%	1.87	1.83	1.80	1.77	1.75	1.73	1.72	1.69	1.68	1.66	1.64	1.62	1.60	1.57
	10.0%	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.25	2.21	2.17	2.12	2.08	2.04	1.97
	5.0%	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.85	2.79	2.72	2.65	2.57	2.51	2.40
	2.5%	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.53	3.43	3.33	3.23	3.12	3.03	2.88
	1.0%	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.54	4.40	4.25	4.10	3.94	3.81	3.60
	0.1%	13.8	11.6	10.3	9.58	9.05	8.66	8.35	7.92	7.63	7.32	7.01	6.68	6.42	6.00
12	50.0%	0.73	0.84	0.89	0.92	0.94	0.96	0.97	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.06
	40.0%	0.99	1.07	1.10	1.12	1.13	1.14	1.15	1.16	1.16	1.17	1.17	1.17	1.18	1.18
	33.3%	1.21	1.26	1.27	1.28	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.28	1.28	1.27
	25.0%	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42
	20.0%	1.85	1.80	1.77	1.74	1.72	1.70	1.69	1.66	1.65	1.63	1.61	1.59	1.57	1.54
	10.0%	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.97	1.90
	5.0%	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.75	2.69	2.62	2.54	2.47	2.40	2.30
	2.5%	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.37	3.28	3.18	3.07	2.96	2.87	2.72
	1.0%	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.30	4.16	4.01	3.86	3.70	3.57	3.36
	0.1%	13.0	10.8	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.29	7.00	6.71	6.40	6.09	5.83	5.42
13	50.0%	0.73	0.83	0.88	0.92	0.94	0.96	0.97	0.98	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05
	40.0%	0.98	1.06	1.09	1.11	1.13	1.13	1.14	1.15	1.15	1.16	1.16	1.16	1.17	1.17
	33.3%	1.20	1.25	1.26	1.27	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.27	1.27	1.27	1.26
	25.0%	1.55	1.55	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.43	1.42	1.40
	20.0%	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.68	1.66	1.64	1.62	1.60	1.58	1.56	1.54	1.51
	10.0%	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.14	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.85
	5.0%	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.67	2.60	2.53	2.46	2.38	2.31	2.21
	2.5%	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.25	3.15	3.05	2.95	2.84	2.74	2.60
	1.0%	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.10	3.96	3.82	3.66	3.51	3.37	3.17
	0.1%	12.3	10.2	9.07	8.35	7.86	7.49	7.21	6.80	6.52	6.23	5.93	5.63	5.37	4.97
14	50.0%	0.73	0.83	0.88	0.91	0.94	0.95	0.96	0.98	0.99	1.00	1.01	1.03	1.04	1.05
	40.0%	0.98	1.05	1.09	1.11	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.15	1.15	1.16	1.16	1.16
	33.3%	1.19	1.24	1.26	1.26	1.27	1.27	1.27	1.27	1.27	1.26	1.26	1.26	1.25	1.24
	25.0%	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.40	1.38
	20.0%	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.65	1.64	1.62	1.60	1.58	1.56	1.53	1.51	1.48
	10.0%	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.10	2.05	2.01	1.96	1.91	1.87	1.80
	5.0%	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.60	2.53	2.46	2.39	2.31	2.24	2.13
	2.5%	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.15	3.05	2.95	2.84	2.73	2.64	2.49
	1.0%	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	3.94	3.80	3.66	3.51	3.35	3.22	3.00
	0.1%	11.8	9.73	8.62	7.92	7.44	7.08	6.80	6.40	6.13	5.85	5.56	5.25	5.00	4.60
15	50.0%	0.73	0.83	0.88	0.91	0.93	0.95	0.96	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03	1.05
	40.0%	0.97	1.05	1.08	1.10	1.11	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.15	1.15	1.15	1.15
	33.3%	1.18	1.23	1.25	1.25	1.26	1.26	1.26	1.26	1.26	1.25	1.25	1.25	1.24	1.23
	25.0%	1.52	1.52	1.51	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.40	1.38	1.36
	20.0%	1.80	1.75	1.71	1.68	1.66	1.64	1.62	1.60	1.58	1.56	1.54	1.51	1.49	1.46
	10.0%	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.06	2.02	1.97	1.92	1.87	1.83	1.76
	5.0%	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.54	2.48	2.40	2.33	2.25	2.18	2.07
	2.5%	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.06	2.96	2.86	2.76	2.64	2.55	2.40
	1.0%	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.80	3.67	3.52	3.37	3.21	3.08	2.87
	0.1%	11.3	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.08	5.81	5.53	5.25	4.95	4.70	4.31

Test F di Fisher

$\nu_{den}\backslash\nu_{num}$		2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
	α														
16	50.0%	0.72	0.82	0.88	0.91	0.93	0.95	0.96	0.97	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04
	40.0%	0.97	1.04	1.08	1.10	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.14	1.14	1.14
	33.3%	1.18	1.22	1.24	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.24	1.24	1.23	1.22
	25.0%	1.51	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.40	1.38	1.37	1.34
	20.0%	1.78	1.74	1.70	1.67	1.64	1.62	1.61	1.58	1.56	1.54	1.52	1.49	1.47	1.43
	10.0%	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.03	1.99	1.94	1.89	1.84	1.79	1.72
	5.0%	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.49	2.42	2.35	2.28	2.19	2.12	2.01
	2.5%	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	2.99	2.89	2.79	2.68	2.57	2.47	2.32
	1.0%	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.69	3.55	3.41	3.26	3.10	2.97	2.75
	0.1%	11.0	9.01	7.94	7.27	6.80	6.46	6.19	5.81	5.55	5.27	4.99	4.70	4.45	4.06
17	50.0%	0.72	0.82	0.87	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.01	1.02	1.03	1.04
	40.0%	0.97	1.04	1.07	1.09	1.10	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.13	1.14	1.14	1.14
	33.3%	1.17	1.22	1.23	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24	1.23	1.23	1.22	1.21
	25.0%	1.51	1.50	1.49	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.37	1.36	1.33
	20.0%	1.77	1.72	1.68	1.65	1.63	1.61	1.59	1.57	1.55	1.53	1.50	1.48	1.46	1.42
	10.0%	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.00	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76	1.69
	5.0%	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.45	2.38	2.31	2.23	2.15	2.08	1.96
	2.5%	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.92	2.82	2.72	2.62	2.50	2.41	2.25
	1.0%	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.59	3.46	3.31	3.16	3.00	2.87	2.65
	0.1%	10.7	8.73	7.68	7.02	6.56	6.22	5.96	5.58	5.32	5.05	4.77	4.48	4.24	3.85
18	50.0%	0.72	0.82	0.87	0.90	0.93	0.94	0.95	0.97	0.98	0.99	1.00	1.02	1.02	1.04
	40.0%	0.96	1.04	1.07	1.09	1.10	1.11	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.13	1.13	1.13
	33.3%	1.17	1.21	1.23	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24	1.23	1.23	1.23	1.22	1.22	1.21
	25.0%	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.40	1.39	1.38	1.36	1.34	1.32
	20.0%	1.76	1.71	1.67	1.64	1.62	1.60	1.58	1.55	1.53	1.51	1.49	1.46	1.44	1.40
	10.0%	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	1.98	1.93	1.89	1.84	1.78	1.74	1.66
	5.0%	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.41	2.34	2.27	2.19	2.11	2.04	1.92
	2.5%	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.87	2.77	2.67	2.56	2.44	2.35	2.19
	1.0%	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.51	3.37	3.23	3.08	2.92	2.78	2.57
	0.1%	10.4	8.49	7.46	6.81	6.35	6.02	5.76	5.39	5.13	4.87	4.59	4.30	4.06	3.67
19	50.0%	0.72	0.82	0.87	0.90	0.92	0.94	0.95	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02	1.04
	40.0%	0.96	1.03	1.07	1.09	1.10	1.10	1.11	1.12	1.12	1.12	1.13	1.13	1.13	1.13
	33.3%	1.16	1.21	1.22	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23	1.22	1.22	1.21	1.20
	25.0%	1.49	1.49	1.47	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.38	1.37	1.35	1.33	1.30
	20.0%	1.75	1.70	1.66	1.63	1.61	1.58	1.57	1.54	1.52	1.50	1.48	1.45	1.43	1.39
	10.0%	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76	1.71	1.63
	5.0%	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.38	2.31	2.23	2.16	2.07	2.00	1.88
	2.5%	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.82	2.72	2.62	2.51	2.39	2.30	2.13
	1.0%	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.43	3.30	3.15	3.00	2.84	2.71	2.49
	0.1%	10.2	8.28	7.27	6.62	6.18	5.85	5.59	5.22	4.97	4.70	4.43	4.14	3.90	3.51
20	50.0%	0.72	0.82	0.87	0.90	0.92	0.94	0.95	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03
	40.0%	0.96	1.03	1.06	1.08	1.09	1.10	1.11	1.11	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12
	33.3%	1.16	1.21	1.22	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23	1.22	1.22	1.22	1.21	1.20	1.19
	25.0%	1.49	1.48	1.47	1.45	1.44	1.43	1.42	1.40	1.39	1.37	1.36	1.34	1.32	1.29
	20.0%	1.75	1.70	1.65	1.62	1.60	1.58	1.56	1.53	1.51	1.49	1.47	1.44	1.41	1.37
	10.0%	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.94	1.89	1.84	1.79	1.74	1.69	1.61
	5.0%	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.35	2.28	2.20	2.12	2.04	1.97	1.84
	2.5%	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.77	2.68	2.57	2.46	2.35	2.25	2.09
	1.0%	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.37	3.23	3.09	2.94	2.78	2.64	2.42
	0.1%	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.08	4.82	4.56	4.29	4.00	3.76	3.38

Test F di Fisher

$\nu_{den} \backslash \nu_{num}$	α	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
21	50.0%	0.72	0.81	0.87	0.90	0.92	0.94	0.95	0.96	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03
	40.0%	0.96	1.03	1.06	1.08	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12
	33.3%	1.16	1.20	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.21	1.20	1.20	1.19
	25.0%	1.48	1.48	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.35	1.33	1.32	1.28
	20.0%	1.74	1.69	1.65	1.61	1.59	1.57	1.55	1.52	1.50	1.48	1.46	1.43	1.40	1.36
	10.0%	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.92	1.87	1.83	1.78	1.72	1.67	1.59
	5.0%	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.32	2.25	2.18	2.10	2.01	1.94	1.81
	2.5%	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.73	2.64	2.53	2.42	2.31	2.21	2.04
	1.0%	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.31	3.17	3.03	2.88	2.72	2.58	2.36
	0.1%	9.77	7.94	6.95	6.32	5.88	5.56	5.31	4.95	4.70	4.44	4.17	3.88	3.64	3.26
22	50.0%	0.72	0.81	0.87	0.90	0.92	0.93	0.95	0.96	0.97	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03
	40.0%	0.96	1.03	1.06	1.08	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.11	1.12	1.12	1.12	1.12
	33.3%	1.16	1.20	1.21	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.21	1.21	1.21	1.20	1.19	1.18
	25.0%	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.37	1.36	1.34	1.32	1.31	1.28
	20.0%	1.73	1.68	1.64	1.61	1.58	1.56	1.54	1.51	1.49	1.47	1.45	1.42	1.39	1.35
	10.0%	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.90	1.86	1.81	1.76	1.70	1.65	1.57
	5.0%	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.30	2.23	2.15	2.07	1.98	1.91	1.78
	2.5%	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.70	2.60	2.50	2.39	2.27	2.17	2.00
	1.0%	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.26	3.12	2.98	2.83	2.67	2.53	2.31
	0.1%	9.61	7.80	6.81	6.19	5.76	5.44	5.19	4.83	4.58	4.33	4.06	3.78	3.54	3.15
23	50.0%	0.71	0.81	0.86	0.90	0.92	0.93	0.95	0.96	0.97	0.98	1.00	1.01	1.02	1.03
	40.0%	0.95	1.02	1.06	1.07	1.09	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11
	33.3%	1.15	1.20	1.21	1.22	1.22	1.22	1.22	1.21	1.21	1.21	1.20	1.19	1.19	1.17
	25.0%	1.47	1.47	1.45	1.43	1.42	1.41	1.40	1.38	1.37	1.35	1.34	1.32	1.30	1.27
	20.0%	1.73	1.68	1.63	1.60	1.57	1.55	1.53	1.51	1.49	1.46	1.44	1.41	1.38	1.34
	10.0%	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.89	1.84	1.80	1.74	1.69	1.64	1.55
	5.0%	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.27	2.20	2.13	2.05	1.96	1.88	1.76
	2.5%	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.67	2.57	2.47	2.36	2.24	2.14	1.97
	1.0%	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.21	3.07	2.93	2.78	2.62	2.48	2.26
	0.1%	9.47	7.67	6.70	6.08	5.65	5.33	5.09	4.73	4.48	4.23	3.96	3.68	3.44	3.05
24	50.0%	0.71	0.81	0.86	0.90	0.92	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.01	1.01	1.03
	40.0%	0.95	1.02	1.06	1.07	1.08	1.09	1.10	1.10	1.10	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11
	33.3%	1.15	1.19	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.20	1.20	1.19	1.18	1.17
	25.0%	1.47	1.46	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.36	1.35	1.33	1.31	1.29	1.26
	20.0%	1.72	1.67	1.63	1.59	1.57	1.55	1.53	1.50	1.48	1.46	1.43	1.40	1.38	1.33
	10.0%	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.88	1.83	1.78	1.73	1.67	1.62	1.53
	5.0%	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.25	2.18	2.11	2.03	1.94	1.86	1.73
	2.5%	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.64	2.54	2.44	2.33	2.21	2.11	1.94
	1.0%	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.17	3.03	2.89	2.74	2.58	2.44	2.21
	0.1%	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.64	4.39	4.14	3.87	3.59	3.36	2.97
25	50.0%	0.71	0.81	0.86	0.89	0.92	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.03
	40.0%	0.95	1.02	1.05	1.07	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11
	33.3%	1.15	1.19	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.20	1.20	1.19	1.19	1.18	1.16
	25.0%	1.47	1.46	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.37	1.36	1.34	1.33	1.31	1.29	1.25
	20.0%	1.72	1.66	1.62	1.59	1.56	1.54	1.52	1.49	1.47	1.45	1.42	1.39	1.37	1.32
	10.0%	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.87	1.82	1.77	1.72	1.66	1.61	1.52
	5.0%	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.24	2.16	2.09	2.01	1.92	1.84	1.71
	2.5%	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.61	2.51	2.41	2.30	2.18	2.08	1.91
	1.0%	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.13	2.99	2.85	2.70	2.54	2.40	2.17
	0.1%	9.22	7.45	6.49	5.89	5.46	5.15	4.91	4.56	4.31	4.06	3.79	3.52	3.28	2.89

Test F di Fisher

$\nu_{den}\backslash\nu_{num}$	α	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
26	50.0%	0.71	0.81	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.03
	40.0%	0.95	1.02	1.05	1.07	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.11	1.11	1.10
	33.3%	1.15	1.19	1.20	1.21	1.21	1.21	1.21	1.20	1.20	1.20	1.19	1.18	1.18	1.16
	25.0%	1.46	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.32	1.30	1.28	1.25
	20.0%	1.71	1.66	1.62	1.58	1.56	1.53	1.52	1.49	1.47	1.44	1.42	1.39	1.36	1.31
	10.0%	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.86	1.81	1.76	1.71	1.65	1.59	1.50
	5.0%	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.22	2.15	2.07	1.99	1.90	1.82	1.69
	2.5%	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.59	2.49	2.39	2.28	2.16	2.05	1.88
	1.0%	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.09	2.96	2.81	2.66	2.50	2.36	2.13
	0.1%	9.12	7.36	6.41	5.80	5.38	5.07	4.83	4.48	4.24	3.99	3.72	3.44	3.21	2.82
27	50.0%	0.71	0.81	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.ga	0.99	1.00	1.01	1.03
	40.0%	0.95	1.02	1.05	1.07	1.08	1.08	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10
	33.3%	1.14	1.19	1.20	1.21	1.21	1.21	1.20	1.20	1.20	1.19	1.19	1.18	1.17	1.16
	25.0%	1.46	1.45	1.43	1.42	1.40	1.39	1.38	1.36	1.35	1.33	1.32	1.30	1.28	1.24
	20.0%	1.71	1.66	1.61	1.58	1.55	1.53	1.51	1.48	1.46	1.44	1.41	1.3a	1.35	1.30
	10.0%	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.85	1.80	1.75	1.70	1.64	1.58	1.49
	5.0%	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.20	2.13	2.06	1.97	1.88	1.81	1.67
	2.5%	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.57	2.47	2.36	2.25	2.13	2.03	1.85
	1.0%	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.06	2.93	2.78	2.63	2.47	2.33	2.10
	0.1%	9.02	7.27	6.33	5.73	5.31	5.00	4.76	4.41	4.17	3.92	3.66	3.38	3.14	2.75
28	50.0%	0.71	0.81	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02
	40.0%	0.95	1.02	1.05	1.07	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10
	33.3%	1.14	1.18	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.19	1.19	1.18	1.17	1.15
	25.0%	1.46	1.45	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.36	1.34	1.33	1.31	1.29	1.27	1.24
	20.0%	1.71	1.65	1.61	1.57	1.55	1.52	1.51	1.48	1.46	1.43	1.41	1.37	1.35	1.30
	10.0%	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.84	1.79	1.74	1.69	1.63	1.57	1.48
	5.0%	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.19	2.12	2.04	1.96	1.87	1.79	1.65
	2.5%	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.55	2.45	2.34	2.23	2.11	2.01	1.83
	1.0%	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.03	2.90	2.75	2.60	2.44	2.30	2.06
	0.1%	8.93	7.19	6.25	5.66	5.24	4.93	4.69	4.35	4.11	3.86	3.60	3.32	3.09	2.69
29	50.0%	0.71	0.81	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02
	40.0%	0.95	1.02	1.05	1.06	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10
	33.3%	1.14	1.18	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.19	1.19	1.18	1.17	1.17	1.15
	25.0%	1.45	1.45	1.43	1.41	1.40	1.38	1.37	1.35	1.34	1.32	1.31	1.29	1.27	1.23
	20.0%	1.70	1.65	1.60	1.57	1.54	1.52	1.50	1.47	1.45	1.43	1.40	1.37	1.34	1.29
	10.0%	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.83	1.78	1.73	1.68	1.62	1.56	1.47
	5.0%	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.18	2.10	2.03	1.94	1.85	1.77	1.64
	2.5%	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.53	2.43	2.32	2.21	2.09	1.99	1.81
	1.0%	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.00	2.87	2.73	2.57	2.41	2.27	2.03
	0.1%	8.85	7.12	6.19	5.59	5.18	4.87	4.64	4.29	4.05	3.80	3.54	3.27	3.03	2.64
30	50.0%	0.71	0.al	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02
	40.0%	0.94	1.01	1.05	1.06	1.07	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.09
	33.3%	1.14	1.18	1.19	1.20	1.20	1.20	1.20	1.19	1.19	1.19	1.18	1.17	1.16	1.15
	25.0%	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.32	1.30	1.28	1.26	1.23
	20.0%	1.70	1.64	1.60	1.57	1.54	1.52	1.50	1.47	1.45	1.42	1.39	1.36	1.34	1.28
	10.0%	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.82	1.77	1.72	1.67	1.61	1.55	1.46
	5.0%	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.16	2.09	2.01	1.93	1.84	1.76	1.62
	2.5%	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.51	2.41	2.31	2.20	2.07	1.97	1.79
	1.0%	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	2.98	2.84	2.70	2.55	2.39	2.25	2.01
	0.1%	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.24	4.00	3.75	3.49	3.22	2.98	2.59

Test F di Fisher

$\nu_{den}\backslash\nu_{num}$		2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
	α														
60	50.0%	0.70	0.80	0.85	0.88	0.90	0.92	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01
	40.0%	0.93	1.00	1.03	1.04	1.05	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07	1.06
	33.3%	1.12	1.16	1.17	1.17	1.17	1.17	1.17	1.16	1.16	1.15	1.14	1.13	1.12	1.10
	25.0%	1.42	1.41	1.38	1.37	1.35	1.33	1.32	1.30	1.29	1.27	1.25	1.22	1.20	1.15
	20.0%	1.65	1.59	1.55	1.51	1.48	1.46	1.44	1.41	1.38	1.35	1.32	1.29	1.25	1.18
	10.0%	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.71	1.66	1.60	1.54	1.48	1.41	1.29
	5.0%	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	1.99	1.92	1.84	1.75	1.65	1.56	1.39
	2.5%	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.27	2.17	2.06	1.94	1.82	1.70	1.48
	1.0%	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.63	2.50	2.35	2.20	2.03	1.88	1.60
	0.1%	7.77	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.86	3.54	3.32	3.08	2.83	2.55	2.32	1.89
80	50.0%	0.70	0.80	0.85	0.88	0.90	0.91	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.99	1.00	1.01
	40.0%	0.93	0.99	1.02	1.04	1.05	1.06	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07	1.06	1.06	1.05
	33.3%	1.11	1.15	1.16	1.17	1.17	1.16	1.16	1.16	1.15	1.14	1.13	1.12	1.11	1.08
	25.0%	1.41	1.40	1.38	1.36	1.34	1.32	1.31	1.29	1.27	1.26	1.23	1.21	1.18	1.12
	20.0%	1.64	1.58	1.53	1.50	1.47	1.44	1.42	1.39	1.37	1.34	1.31	1.27	1.23	1.16
	10.0%	2.37	2.15	2.02	1.92	1.85	1.79	1.75	1.68	1.63	1.57	1.51	1.44	1.38	1.24
	5.0%	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	1.95	1.88	1.79	1.70	1.60	1.51	1.32
	2.5%	3.86	3.28	2.95	2.73	2.57	2.45	2.35	2.21	2.11	2.00	1.88	1.75	1.63	1.40
	1.0%	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.55	2.42	2.27	2.12	1.94	1.79	1.49
	0.1%	7.54	5.97	5.12	4.58	4.20	3.92	3.70	3.39	3.16	2.93	2.68	2.41	2.16	1.72
100	50.0%	0.70	0.79	0.84	0.88	0.90	0.91	0.92	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	1.01
	40.0%	0.92	0.99	1.02	1.04	1.05	1.05	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.04
	33.3%	1.11	1.15	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.15	1.15	1.14	1.13	1.12	1.10	1.07
	25.0%	1.41	1.39	1.37	1.35	1.33	1.32	1.30	1.28	1.27	1.25	1.23	1.20	1.17	1.11
	20.0%	1.64	1.58	1.53	1.49	1.46	1.43	1.41	1.38	1.36	1.33	1.30	1.26	1.22	1.14
	10.0%	2.36	2.14	2.00	1.91	1.83	1.78	1.73	1.66	1.61	1.56	1.49	1.42	1.35	1.21
	5.0%	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.93	1.85	1.77	1.68	1.57	1.48	1.28
	2.5%	3.83	3.25	2.92	2.70	2.54	2.42	2.32	2.18	2.08	1.97	1.85	1.71	1.59	1.35
	1.0%	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.50	2.37	2.22	2.07	1.89	1.74	1.43
	0.1%	7.41	5.86	5.02	4.48	4.11	3.83	3.61	3.30	3.07	2.84	2.59	2.32	2.08	1.62
120	50.0%	0.70	0.79	0.84	0.88	0.90	0.91	0.92	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	1.01
	40.0%	0.92	0.99	1.02	1.04	1.04	1.05	1.05	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.05	1.04
	33.3%	1.11	1.15	1.16	1.16	1.16	1.16	1.15	1.15	1.14	1.13	1.13	1.11	1.10	1.06
	25.0%	1.40	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.30	1.28	1.26	1.24	1.22	1.19	1.16	1.10
	20.0%	1.63	1.57	1.52	1.48	1.45	1.43	1.41	1.37	1.35	1.32	1.29	1.25	1.21	1.12
	10.0%	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.65	1.60	1.54	1.48	1.41	1.34	1.19
	5.0%	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.91	1.83	1.75	1.66	1.55	1.46	1.25
	2.5%	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.16	2.05	1.94	1.82	1.69	1.56	1.31
	1.0%	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.47	2.34	2.19	2.03	1.86	1.70	1.38
	0.1%	7.32	5.78	4.95	4.42	4.04	3.77	3.55	3.24	3.02	2.78	2.53	2.26	2.02	1.54
∞	50.0%	0.69	0.79	0.84	0.87	0.89	0.91	0.92	0.93	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00
	40.0%	0.92	0.98	1.01	1.03	1.04	1.04	1.04	1.05	1.05	1.05	1.05	1.04	1.04	1.00
	33.3%	1.10	1.13	1.14	1.15	1.14	1.14	1.14	1.13	1.13	1.12	1.11	1.09	1.07	1.00
	25.0%	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.29	1.28	1.25	1.24	1.22	1.19	1.16	1.13	1.00
	20.0%	1.61	1.55	1.50	1.46	1.43	1.40	1.38	1.34	1.32	1.29	1.25	1.21	1.16	1.00
	10.0%	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.60	1.55	1.49	1.42	1.34	1.26	1.00
	5.0%	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.83	1.75	1.67	1.57	1.46	1.35	1.00
	2.5%	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.05	1.94	1.83	1.71	1.57	1.43	1.00
	1.0%	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.32	2.18	2.04	1.88	1.70	1.52	1.00
	0.1%	6.91	5.42	4.62	4.10	3.74	3.47	3.27	2.96	2.74	2.51	2.27	1.99	1.73	1.00

Test χ^2

ν	99.9%	99.5%	99.0%	97.5%	95.0%	90.0%	87.5%	80.0%	75.0%	66.7%	50.0%
1	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.025	0.064	0.102	0.186	0.455
2	0.002	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.267	0.446	0.575	0.811	1.386
3	0.024	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	0.692	1.005	1.213	1.568	2.366
4	0.091	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.219	1.649	1.923	2.378	3.357
5	0.210	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	1.808	2.343	2.675	3.216	4.351
6	0.381	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	2.441	3.070	3.455	4.074	5.348
7	0.598	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	3.106	3.822	4.255	4.945	6.346
8	0.857	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	3.797	4.594	5.071	5.826	7.344
9	1.152	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	4.507	5.380	5.899	6.716	8.343
10	1.479	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	5.234	6.179	6.737	7.612	9.342
11	1.834	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	5.975	6.989	7.584	8.514	10.341
12	2.214	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	6.729	7.807	8.438	9.420	11.340
13	2.617	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	7.493	8.634	9.299	10.331	12.340
14	3.041	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	8.266	9.467	10.165	11.245	13.339
15	3.483	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	9.048	10.307	11.037	12.163	14.339
16	3.942	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	9.837	11.152	11.912	13.083	15.338
17	4.416	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	10.633	12.002	12.792	14.006	16.338
18	4.905	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	11.435	12.857	13.675	14.931	17.338
19	5.407	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	12.242	13.716	14.562	15.859	18.338
20	5.921	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	13.055	14.578	15.452	16.788	19.337
21	6.447	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	13.873	15.445	16.344	17.720	20.337
22	6.983	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	14.695	16.314	17.240	18.653	21.337
23	7.529	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	15.521	17.187	18.137	19.587	22.337
24	8.085	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	16.351	18.062	19.037	20.523	23.337
25	8.649	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	17.184	18.940	19.939	21.461	24.337
26	9.222	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	18.021	19.820	20.843	22.399	25.336
27	9.803	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	18.861	20.703	21.749	23.339	26.336
28	10.391	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	19.704	21.588	22.657	24.280	27.336
29	10.986	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	20.550	22.475	23.567	25.222	28.336
30	11.588	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	21.399	23.364	24.478	26.165	29.336
35	14.688	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	25.678	27.836	29.054	30.894	34.336
40	17.916	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	30.008	32.345	33.660	35.643	39.335
45	21.251	24.311	25.901	28.366	30.612	33.350	34.379	36.884	38.291	40.407	44.335
50	24.674	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	38.785	41.449	42.942	45.184	49.335
55	28.173	31.735	33.570	36.398	38.958	42.060	43.220	46.036	47.610	49.972	54.335
60	31.738	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	47.680	50.641	52.294	54.770	59.335

Test χ^2

ν	40.0%	33.3%	25.0%	20.0%	12.5%	10.0%	5.0%	2.5%	1.0%	0.5%	0.1%
1	0.708	0.936	1.323	1.642	2.354	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828
2	1.833	2.197	2.773	3.219	4.159	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.816
3	2.946	3.405	4.108	4.642	5.739	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	4.045	4.579	5.385	5.989	7.214	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.467
5	5.132	5.730	6.626	7.289	8.625	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750	20.515
6	6.211	6.867	7.841	8.558	9.992	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.458
7	7.283	7.992	9.037	9.803	11.326	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.322
8	8.351	9.107	10.219	11.030	12.636	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.125
9	9.414	10.215	11.389	12.242	13.926	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	10.473	11.317	12.549	13.442	15.198	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588
11	11.530	12.414	13.701	14.631	16.457	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757	31.264
12	12.584	13.506	14.845	15.812	17.703	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300	32.910
13	13.636	14.595	15.984	16.985	18.939	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819	34.528
14	14.685	15.680	17.117	18.151	20.166	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319	36.123
15	15.733	16.761	18.245	19.311	21.384	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801	37.697
16	16.780	17.840	19.369	20.465	22.595	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267	39.252
17	17.824	18.917	20.489	21.615	23.799	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718	40.790
18	18.868	19.991	21.605	22.760	24.997	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156	42.312
19	19.910	21.063	22.718	23.900	26.189	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582	43.820
20	20.951	22.133	23.828	25.038	27.376	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997	45.315
21	21.991	23.201	24.935	26.171	28.559	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401	46.797
22	23.031	24.268	26.039	27.301	29.737	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796	48.268
23	24.069	25.333	27.141	28.429	30.911	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181	49.728
24	25.106	26.397	28.241	29.553	32.081	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559	51.179
25	26.143	27.459	29.339	30.675	33.247	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928	52.620
26	27.179	28.520	30.435	31.795	34.410	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290	54.052
27	28.214	29.580	31.528	32.912	35.570	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645	55.476
28	29.249	30.639	32.620	34.027	36.727	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993	56.892
29	30.283	31.697	33.711	35.139	37.881	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336	58.301
30	31.316	32.754	34.800	36.250	39.033	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672	59.703
35	36.475	38.024	40.223	41.778	44.753	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275	66.619
40	41.622	43.275	45.616	47.269	50.424	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766	73.402
45	46.761	48.510	50.985	52.729	56.052	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166	80.077
50	51.892	53.733	56.334	58.164	61.647	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490	86.661
55	57.016	58.945	61.665	63.577	67.211	68.796	73.311	77.380	82.292	85.749	93.168
60	62.135	64.147	66.981	68.972	72.751	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952	99.607